Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 183 (39/2018)
Piątek, 28 września 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1312**, **1313** i **1314** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1312. Zapisz liczbę 112 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1313. Zapisz liczbę 132 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1314. Zapisz liczbę 192 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

Reszty z dzielenia czwartych potęg przez 16

Zapamiętaj:

Czwarta potęga liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 16 jedną z reszt: 0, 1.

Aby to udowodnić, rozważymy dwa przypadki.

1° Czwarta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 16, czyli przy dzieleniu przez 16 daje resztę 0.

2° Czwarta potęga liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1.

Zajmiemy się dowodem nieoczywistego przypadku **2**°.

Sposób I: Zauważmy, że każda liczba nieparzysta sąsiaduje z liczbą podzielną przez 4. Przyjmijmy więc $n=4k\pm1$. Wówczas

$$n^4=(4k\pm1)^4=256k^4\pm256k^3+96k^2\pm16k+1=16\left(16k^4\pm16k^3+6k^2\pm k\right)+1\,.$$

Sposób II: Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wówczas

$$n^4-1=\left(n^2+1\right)(n-1)(n+1)\,.$$

Ponieważ liczby n^2+1, $n-1$ oraz $n+1$ są parzyste, a jedna z liczb $n-1$ oraz $n+1$ jest podzielna przez 4, liczba $(n^2+1)(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 16.

Reszty z dzielenia czwartych potęg przez 5

Zapamiętaj:

Czwarta potęga liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 5 jedną z reszt: 0, 1.

Aby to udowodnić, rozważymy dwa przypadki.

1° Czwarta potęga liczby podzielnej przez 5 jest podzielna przez 5, czyli przy dzieleniu przez 5 daje resztę 0.

2° Czwarta potęga liczby niepodzielnej przez 5 daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1.

Zajmiemy się dowodem nieoczywistego przypadku **2**°.

Jeżli liczba n jest niepodzielna przez 5, to jedna z liczb $n-2$, $n-1$, $n+1$, $n+2$ jest podzielna przez 5, a co za tym idzie podzielna przez 5 jest liczba

$$(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)=\left(n^2-4\right)\left(n^2-1\right)=\left(n^2+1-5\right)\left(n^2-1\right)=n^4-1-5\left(n^2-1\right)\,,$$

skąd wynika, że liczba n^4-1 jest podzielna przez 5.

1315. Których reszt nie może dawać przy dzieleniu przez 16 liczba postaci
$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_{13}^4\,,$$
gdzie a_1, a_2, …, a_{13} są liczbami całkowitymi?

1316. Jaka może być reszta z dzielenia przez 16 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1317. Jaka może być reszta z dzielenia przez 3 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1318. Jaką resztę może dawać przy dzieleniu przez 48 czwarta potęga liczby pierwszej?

1319. Jaką resztę może dawać przy dzieleniu przez 48 czwarta potęga liczby całkowitej?

1320. Jaka może być reszta z dzielenia przez 48 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1321. Której reszty nie może dawać przy dzieleniu przez 5 liczba postaci $a^4+b^4+c^4$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi?

1322. Jaka może być reszta z dzielenia przez 5 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1323. Jaka może być reszta z dzielenia przez 15 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1324. Jaka może być reszta z dzielenia przez 80 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1325. Jaką resztę może dawać przy dzieleniu przez 240 czwarta potęga liczby pierwszej?

1326. Jaką resztę może dawać przy dzieleniu przez 240 czwarta potęga liczby całkowitej?

1327. Jaka może być reszta z dzielenia przez 240 liczby postaci $p_1^4+p_2^4+\ldots+p_{77}^4$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

Odpowiedzi do zadań 1298–1311

1298. $33=\dfrac{7!}{5!}-9=\dfrac{5!}{\sqrt{9}}-7$

1299. $41=5\cdot 7+\left(\sqrt{9}\right)!=5!-79$

1300. $53=\sqrt{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!\cdot 5-7}$

1301. 0, 1, 4, 5, 6, 9.

1302. Dla $p=5$ otrzymujemy liczby pierwsze $p^2+4=29$ oraz $p^2+6=31$. Jeżeli natomiast liczba pierwsza p jest różna od 5, to jest niepodzielna przez 5, wobec czego jedna z liczb p^2+4 i p^2+6 jest złożona jako liczba podzielna przez 5 (i jednocześnie większa od 5).

1303. *Sposób I:* Lewa strona równania daje przy dzieleniu przez 4 jedną z reszt 2, 3, a prawa jedną z reszt 0, 1.

Sposób II: Lewa strona równania daje przy dzieleniu przez 5 jedną z reszt 1, 2, 3, a prawa strona jest podzielna przez 5.

1304. 3, 4, 5, 6. **1305.** 4, 5. **1306.** 1, 3, 6, 8.

1307. 0, 2, 4, 5, 7. **1308.** 0, 2, 7. **1309.** 1, 8. **1310.** 0.

1311. Nie, gdyż liczba o sumie cyfr 149 daje przy dzieleniu przez 9 resztę 5.