Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 184 (40/2018)
Piątek, 5 października 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1328**, **1329** i **1330** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1328. Zapisz liczbę 43 używając cyfr 0, 3, 5 i 6 (każdej tylko raz).

1329. Zapisz liczbę 76 używając cyfr 2, 6 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1330. Zapisz liczbę 184 używając cyfr 1, 2, 3 i 4 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Tożsamości i nierówności — trochę teorii

Zapamiętaj:

Dla każdych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $2ab \leqslant a^2+b^2$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Powyższą nierówność dowodzimy przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy.

Otrzymujemy kolejno nierówności równoważne

$$0 \leqslant a^2-2ab+b^2$$

oraz

$$0 \leqslant (a-b)^2 .$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemy, a co więcej równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a-b=0$, czyli $a=b$.

Uwagi: W przypadku, gdy a i b są liczbami nieujemnymi, podana wyżej nierówność jest równoważna nierówności

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} ,$$

jeśli przyjąć $a=\sqrt{x}$ oraz $b=\sqrt{y}$. W przypadku, gdy liczby x i y są dodatnie, liczbę $\sqrt{xy}$ nazywamy średnią geometryczną liczb x i y, natomiast liczba $\frac{x+y}{2}$ jest średnią arytmetyczną liczb x i y. Można obliczać średnią arytmetyczną dowolnych liczb rzeczywistych, także ujemnych.

Możemy więc powiedzieć, że średnia geometryczna dwóch liczb rzeczywistych dodatnich jest nie większa od ich średniej arytmetycznej, przy czym średnie te są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są liczby użyte do obliczania tych średnich.

Chociaż dla jednolitości sformułowania przyjęliśmy, że liczby a i b są rzeczywiste (a więc mogą być ujemne), to istota nierówności tkwi w przypadku dodatnich liczb a i b. Dla dowolnych a i b mamy bowiem

$$2ab \leqslant |2ab| = 2\cdot|a|\cdot|b| \leqslant |a|^2+|b|^2 = a^2+b^2 .$$

Zapamiętaj drugą wersję:

Dla liczb rzeczywistych dodatnich x i y zachodzi nierówność $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.

Tożsamości i nierówności — zadania

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

1331. $4xy \leqslant x^2+4y^2$ **1332.** $xy \leqslant x^2+\frac{y^2}{4}$ **1333.** $70xy \leqslant 25x^2+49y^2$

1334. Czy dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n prawdziwa jest nierówność

$$m^2+n^2 \leqslant 2018mn\ ?$$

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Kiedy zachodzi równość?

1335. $20x \leqslant x^2+100$ **1336.** $20x \leqslant 100x^2+1$ **1337.** $20x \leqslant 10x^2+10$ **1338.** $20x \leqslant 25x^2+4$

1339. Udowodnij, że nierówność

$$12x^2y^3 \leqslant 4x^4+9y^6$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

1340. Udowodnij, że nierówność

$$2mn \leqslant m^3+n^3$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n. Kiedy zachodzi równość?

Odpowiedzi do zadań 1312–1327

1312. $112=\frac{7!}{5\cdot 9}$ **1313.** $132=5^{\sqrt{9}}+7$ **1314.** $192=5!+\frac{9!}{7!}$

1315. 14, 15. **1316.** 12, 13. **1317.** 1, 2. **1318.** 1, 16, 33.

1319. 0, 1, 16, 33. **1320.** 13, 28, 29, 44. **1321.** 4.

1322. 1, 2. **1323.** 1, 2, 7, 11. **1324.** 12, 61, 76, 77. **1325.** 1, 16, 81, 145.

1326. 0, 1, 16, 81, 96, 145, 160, 225. **1327.** 61, 76, 77, 92, 157, 172, 221, 236.