Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 185 (41/2018)
Piątek, 12 października 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1341**, **1342** i **1343** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1341. Zapisz liczbę 185 używając cyfr 0, 2, 7 i 8 (każdej tylko raz).

1342. Zapisz liczbę 185 używając cyfr 1, 2, 3 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1343. Zapisz liczbę 185 używając cyfr 3, 3, 5 i 5.

Tożsamości i nierówności

1344. Udowodnij, że nierówność

$$4m^2n^2 < 4m^5 + n^5$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n.

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x, y i z. Kiedy zachodzi równość?

1345. $30x^2y^3z^5 \leqslant 225x^4y^6 + z^{10}$

1346. $30x^2y^3z^5 \leqslant 25x^4z^{10} + 9y^6$

1347. $2xy + 2yz \leqslant x^2 + 2y^2 + z^2$

1348. $4xy + 4yz \leqslant 4x^2 + 2y^2 + 4z^2$

1349. $4xy + 4yz \leqslant 4x^2 + 5y^2 + z^2$

Rozwiązania zadań 1328–1340

1328. $43 = \dfrac{5! + 6}{3} + 0!$

1329. $76 = \sqrt{8 \cdot (6! + 2)} = 82 - 6$

1330. $184 = (4! - 1) \cdot 2^3 = (4 + 1)! + 2^{3!}$

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

1331. $4xy \leqslant x^2 + 4y^2$

Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2 + b^2$ dla $a = x$ i $b = 2y$.

Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(x - 2y)^2 \geqslant 0$.

W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2y$.

1332. $xy \leqslant x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2 + b^2$ dla $a = x$ i $b = y/2$.

Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(2x - y)^2 \geqslant 0$.

W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y = 2x$.

1333. $70xy \leqslant 25x^2 + 49y^2$

Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2 + b^2$ dla $a = 5x$ i $b = 7y$.

Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(5x - 7y)^2 \geqslant 0$.

W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $5x = 7y$, czyli $y = 5x/7$.

1334. Czy dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n prawdziwa jest nierówność

$$m^2 + n^2 \leqslant 2018mn \ ?$$

Nie, np. dla $m = 1$ i $n = 2018$ otrzymujemy

$$m^2 + n^2 = 1 + 2018^2 > 2018^2 = 2018mn\,.$$

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Kiedy zachodzi równość?

1335. $20x \leqslant x^2+100$
Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=10$.
Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(x-10)^2 \geqslant 0$.
W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=10$.

1336. $20x \leqslant 100x^2+1$
Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=10x$ i $b=1$.
Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(10x-1)^2 \geqslant 0$.
W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1/10$.

1337. $20x \leqslant 10x^2+10$
Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=1$, a następnie mnożymy ją stronami przez 10 .
Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $10(x-1)^2 \geqslant 0$.
W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$.

1338. $20x \leqslant 25x^2+4$
Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=5x$ i $b=2$.
Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $(5x-2)^2 \geqslant 0$.
W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2/5$.

1339. Udowodnij, że nierówność

$$12x^2y^3 \leqslant 4x^4+9y^6$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?
Sposób I: Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x^2$ i $b=3y^3$.
Sposób II: Przekształcamy daną nierówność do postaci $\left(2x^2-3y^3\right)^2 \geqslant 0$.
W każdym ze sposobów ustalamy, że w dowodzonej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x^2=3y^3$, czyli $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{3}}$.

1340. Udowodnij, że nierówność

$$2mn \leqslant m^3+n^3$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n. Kiedy zachodzi równość?
Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=m$ i $b=n$ otrzymujemy nierówność

$$2mn \leqslant m^2+n^2\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m=n$. Ponadto zauważamy, że $m^2 \leqslant m^3$ oraz $n^2 \leqslant n^3$, przy czym równości zachodzą, gdy odpowiednio $m=1$ oraz $n=1$.
W konsekwencji

$$2mn \leqslant m^2+n^2 \leqslant m^3+n^3\,,$$

a równość w danej w zadaniu nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m=n=1$.