Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 186 (42/2018)

Piątek, 19 października 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1350**, **1351** i **1352** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1350. Zapisz liczbę 186 używając cyfr 3, 4 i 4.

1351. Zapisz liczbę 186 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

1352. Zapisz liczbę 186 używając cyfr 4, 4 i 7.

Tożsamości i nierówności

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których spełnione jest podane równanie.

1353. $2xy+2y=x^2+2y^2+1$

1354. $4xy+4y=x^2+5y^2+4$

1355. $4xy+4y=x^2+8y^2+1$

1356. $4x+4y=x^2+y^2+8$

1357. $4x+4y=4x^2+y^2+5$

Rozwiązania zadań 1341–1349

1341. $185=2^8-\sqrt{7!+0!}$

1342. $185=\left((3!)^2+1\right)\cdot 5=5!+2^{3!}+1$

1343. $185=5^3+\sqrt{(3!)!\cdot 5}=\dfrac{(3!)!}{3}-55=3!\cdot 3!\cdot 5+5=5+3\cdot\sqrt{(3!)!\cdot 5}=5\cdot\left(\dfrac{5!}{3}-3\right)=$
$=(3!)!-535$

Ostatnie pięć rozwiązań zadania **1343** podał Wojtek Łach.

1344. Udowodnij, że nierówność

$$4m^2n^2<4m^5+n^5$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=2m^2$ i $b=n^2$ otrzymujemy nierówność

$$4m^2n^2\leqslant 4m^4+n^4\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2m^2=n^2$. Ponieważ jednak dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi $2m^2\neq n^2$, faktycznie równość nie może mieć miejsca i nierówność jest ostra. Ponadto zauważamy, że $m^4\leqslant m^5$ oraz $n^4\leqslant n^5$.

W konsekwencji

$$4m^2n^2<4m^4+n^4\leqslant 4m^5+n^5\,.$$

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy następujący fakt teorioliczbowy:

Równanie $2m^2=n^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m i n.

Jest to równoważne niewymierności liczby $\sqrt{2}$, a faktycznie stanowi główną część dowodu niewymierności tej liczby.

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x, y i z. Kiedy zachodzi równość?

1345. $30x^2y^3z^5\leqslant 225x^4y^6+z^{10}$

Korzystamy z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=15x^2y^3$ i $b=z^5$.
Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $15x^2y^3=z^5$, czyli $z=\sqrt[5]{15x^2y^3}$.

Uwaga: Należy podkreślić, że wśród trójek liczb x, y, z, dla których w dowodzonej nierówności zachodzi równość, są też takie, w których liczby y i z są ujemne. Nie stanowi to żadnego problemu, jeśli przypomnimy sobie, że pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej ma sens i jest liczbą ujemną.

1346. $30x^2y^3z^5 \leqslant 25x^4z^{10}+9y^6$

Korzystamy z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=5x^2z^5$ i $b=3y^3$.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $5x^2z^5=3y^3$, czyli $y=\sqrt[3]{\frac{5x^2z^5}{3}}$.

1347. $2xy+2yz \leqslant x^2+2y^2+z^2$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$2xy \leqslant x^2+y^2\,, \tag{1}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=z$ otrzymujemy nierówność

$$2yz \leqslant y^2+z^2\,, \tag{2}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=z$.

Dodając stronami nierówności (1) i (2) otrzymujemy nierówność z treści zadania. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=z$.

1348. $4xy+4yz \leqslant 4x^2+2y^2+4z^2$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$4xy \leqslant 4x^2+y^2\,, \tag{3}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=2z$ otrzymujemy nierówność

$$4yz \leqslant y^2+4z^2\,, \tag{4}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=2z$.

Dodając stronami nierówności (3) i (4) otrzymujemy nierówność z treści zadania. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y=2z$.

1349. $4xy+4yz \leqslant 4x^2+5y^2+z^2$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$4xy \leqslant 4x^2+y^2\,, \tag{5}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2y$ i $b=z$ otrzymujemy nierówność

$$4yz \leqslant 4y^2+z^2\,, \tag{6}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2y=z$.

Dodając stronami nierówności (5) i (6) otrzymujemy nierówność z treści zadania. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y$ i $2y=z$, co można zapisać jako $4x=2y=z$.