Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 187 (43/2018)**
**Piątek, 26 października 2018 r.**

## Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1358**, **1359** i **1360** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**1358.** Zapisz liczbę 187 używając cyfr 0, 1, 5 i 7 (każdej tylko raz).

**1359.** Zapisz liczbę 187 używając cyfr 3, 3, 7 i 9.

**1360.** Zapisz liczbę 187 używając cyfr 3, 5, 6 i 8 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

## Tożsamości i nierówności

**1361.** Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych $x$, $y$, dla których spełnione jest równanie $2x+2y=2x^2+2y^2+1$.

**1362.** Udowodnij, że nierówność

$$2xy+2x^2y\leqslant x^4+x^2+2y^2$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych $x$ i $y$. Kiedy zachodzi równość?

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych $x$, $y$, dla których spełnione jest podane równanie.

**1363.** $4xy+2x^2y=x^4+4x^2+2y^2$ **1364.** $6x^3+6xy=x^4+18x^2+y^2$

## Rozwiązania zadań 1350–1357

**1350.** $186=\dfrac{(3!)!+4!}{4}$ **1351.** $186=3!\cdot(4!+7)$ **1352.** $186=\dfrac{7!}{4!}-4!$

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych $x$, $y$, dla których spełnione jest podane równanie.

**1353.** $2xy+2y=x^2+2y^2+1$

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$2xy\leqslant x^2+y^2\,, \tag{1}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=1$ otrzymujemy nierówność

$$2y\leqslant y^2+1\,, \tag{2}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=1$.

Dodając stronami nierówności (1) i (2) otrzymujemy nierówność

$$2xy+2y\leqslant x^2+2y^2+1\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y=1$.

Zatem jedynym rozwiązaniem danego w zadaniu równania są liczby $x=y=1$.

**1354.** $4xy+4y=x^2+5y^2+4$

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=2y$ otrzymujemy nierówność

$$4xy\leqslant x^2+4y^2\,, \tag{3}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2y$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=2$ otrzymujemy nierówność

$$4y\leqslant y^2+4\,, \tag{4}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=2$.

Dodając stronami nierówności (3) i (4) otrzymujemy nierówność

$$4xy+4y \leqslant x^2+5y^2+4\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2y$ i $y=2$.

Zatem jedyne rozwiązanie danego w zadaniu równania to $x=4$ i $y=2$.

**1355.** $4xy+4y=x^2+8y^2+1$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=2y$ otrzymujemy nierówność

$$4xy \leqslant x^2+4y^2\,, \tag{5}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2y$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2y$ i $b=1$ otrzymujemy nierówność

$$4y \leqslant 4y^2+1\,, \tag{6}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2y=1$.

Dodając stronami nierówności (5) i (6) otrzymujemy nierówność

$$4xy+4y \leqslant x^2+8y^2+1\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2y$ i $2y=1$.

Zatem jedyne rozwiązanie danego w zadaniu równania to $x=1$ i $y=1/2$.

**1356.** $4x+4y=x^2+y^2+8$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=2$ otrzymujemy nierówność

$$4x \leqslant x^2+4\,, \tag{7}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=2$ otrzymujemy nierówność

$$4y \leqslant y^2+4\,, \tag{8}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=2$.

Dodając stronami nierówności (7) i (8) otrzymujemy nierówność

$$4x+4y \leqslant x^2+y^2+8\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=2$ i $y=2$.

Zatem jedyne rozwiązanie danego w zadaniu równania to $x=y=2$.

**1357.** $4x+4y=4x^2+y^2+5$

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x$ i $b=1$ otrzymujemy nierówność

$$4x \leqslant 4x^2+1\,, \tag{9}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=1$.

Korzystając z nierówności $2ab \leqslant a^2+b^2$ dla $a=y$ i $b=2$ otrzymujemy nierówność

$$4y \leqslant y^2+4\,, \tag{10}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y=2$.

Dodając stronami nierówności (9) i (10) otrzymujemy nierówność

$$4x+4y \leqslant 4x^2+y^2+5\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=1$ i $y=2$.

Zatem jedyne rozwiązanie danego w zadaniu równania to $x=1/2$ i $y=2$.