Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 188 (44/2018)

Środa, 31 października 2018 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **1365**, **1366** i **1367** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1365. Zapisz liczbę 188 używając cyfr 1, 1, 2 i 9.

1366. Zapisz liczbę 188 używając cyfr 2, 2, 5 i 7.

1367. Zapisz liczbę 188 używając cyfr 4, 4 i 7.

Tożsamości i nierówności

Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $x+y=s$ oraz $xy=p$. Wyraź podane wyrażenie przy pomocy s i p.

1368. x^2+y^2 **1369.** x^3+y^3

Rozłóż podane wyrażenie na iloczyn dodając i odejmując odpowiednie wyrażenie i korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów (w pierwszym zadaniu ujawniona jest część rachunków).

1370. $x^4+4y^4=x^4+\ldots x^2y^2+4y^4-\ldots x^2y^2=(\ldots\ldots)^2-(\ldots\ldots)^2=(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)$

1371. $x^4+x^2y^2+y^4$ **1372.** $x^4-7x^2y^2+y^4$ **1373.** $x^4-12x^2y^2+4y^4$

1374. $x^4-13x^2y^2+4y^4$

Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n podana liczba nie jest kwadratem liczby całkowitej.

1375. n^2+n+1 **1376.** n^2+4n+7 **1377.** n^2+6n+7 **1378.** $n^2+6n+11$

Rozwiązania zadań 1358–1364

1358. $187=17\cdot\sqrt{5!+0!}$ **1359.** $187=\dfrac{7!+9}{3^3}$ **1360.** $187=3^5-\dfrac{8!}{6!}=65\cdot 3-8$

1361. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których spełnione jest równanie

$$2x+2y=2x^2+2y^2+1.$$

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x$ i $b=1$ otrzymujemy nierówność

$$4x\leqslant 4x^2+1\,, \tag{1}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=1$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=2y$ i $b=1$ otrzymujemy nierówność

$$4y\leqslant 4y^2+1\,, \tag{2}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2y=1$.

Dodając stronami nierówności (1) i (2), a następnie dzieląc stronami ich sumę przez 2, otrzymujemy nierówność

$$2x+2y=2x^2+2y^2+1\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=1$ i $2y=1$.

Zatem jedyne rozwiązanie danego w zadaniu równania to $x=y=1/2$.

1362. Udowodnij, że nierówność

$$2xy+2x^2y\leqslant x^4+x^2+2y^2$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$2xy\leqslant x^2+y^2\,, \tag{3}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x^2$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$2x^2y\leqslant x^4+y^2\,, \tag{4}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=y$.

Dodając stronami nierówności (3) i (4) otrzymujemy nierówność daną w treści zadania.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$ i $x^2=y$, czyli dla $x=y=0$ oraz $x=y=1$.

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których spełnione jest podane równanie.

1363. $4xy+2x^2y=x^4+4x^2+2y^2$

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=2x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$4xy\leqslant 4x^2+y^2\,, \tag{5}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x^2$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$2x^2y\leqslant x^4+y^2\,, \tag{6}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=y$.

Dodając stronami nierówności (5) i (6) otrzymujemy nierówność

$$4xy+2x^2y\leqslant x^4+4x^2+2y^2\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2x=y$ i $x^2=y$, skąd musi być $2x=x^2$, czyli $x=0$ lub $x=2$.

Zatem dane w zadaniu równanie ma dwa rozwiązania: $x=y=0$ oraz $x=2$ i $y=4$.

1364. $6x^3+6xy=x^4+18x^2+y^2$

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=x^2$ i $b=3x$ otrzymujemy nierówność

$$6x^3\leqslant x^4+9x^2\,, \tag{7}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=3x$.

Korzystając z nierówności $2ab\leqslant a^2+b^2$ dla $a=3x$ i $b=y$ otrzymujemy nierówność

$$6xy\leqslant 9x^2+y^2\,, \tag{8}$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $3x=y$.

Dodając stronami nierówności (7) i (8) otrzymujemy nierówność

$$6x^3+6xy\leqslant x^4+18x^2+y^2\,,$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2=3x$ i $3x=y$, skąd na podstawie pierwszej równości dostajemy $x=0$ lub $x=3$.

Zatem dane w zadaniu równanie ma dwa rozwiązania: $x=y=0$ oraz $x=3$ i $y=9$.