Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 189 (45/2018)
Piątek, 9 listopada 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1379**, **1380** i **1381** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1379. Zapisz liczbę 189 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

1380. Zapisz liczbę 189 używając cyfr 3, 4 i 8 (każdej tylko raz).

1381. Zapisz liczbę 189 używając cyfr 3, 4 i 9 (każdej tylko raz).

Tożsamości i nierówności

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

1382. n^2+5n+2 **1383.** $n^2+5n+13$ **1384.** $n^2+5n+22$ **1385.** $n^2+5n+40$

Rozwiązania zadań 1365–1378

1365. $188=21\cdot9-1$ **1366.** $188=2^7+\dfrac{5!}{2}$ **1367.** $188=47\cdot4$

Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $x+y=s$ oraz $xy=p$. Wyraź podane wyrażenie przy pomocy s i p.

1368. x^2+y^2

Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy otrzymujemy

$$s^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2p\,,$$

skąd

$$x^2+y^2=s^2-2p\,.$$

1369. x^3+y^3

Korzystając ze wzoru na sześcian sumy otrzymujemy

$$s^3=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+3xy\cdot(x+y)+y^3=x^3+y^3+3sp\,,$$

skąd

$$x^3+y^3=s^3-3sp\,.$$

Rozłóż podane wyrażenie na iloczyn dodając i odejmując odpowiednie wyrażenie i korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów (w pierwszym zadaniu ujawniona jest część rachunków).

1370. $x^4+4y^4=x^4+\ldots x^2y^2+4y^4-\ldots x^2y^2=(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2-(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2=(\ldots\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=$$
$$=\left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2=\left(x^2-2xy+2y^2\right)\cdot\left(x^2+2xy+2y^2\right)\,.$$

1371. $x^4+x^2y^2+y^4$

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+x^2y^2+x^2y^2+y^4-x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=$$
$$=\left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=\left(x^2-xy+y^2\right)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)\,.$$

1372. $x^4-7x^2y^2+y^4$

$$x^4-7x^2y^2+y^4=x^4-7x^2y^2+9x^2y^2+y^4-9x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-9x^2y^2=$$
$$=\left(x^2+y^2\right)^2-(3xy)^2=\left(x^2-3xy+y^2\right)\cdot\left(x^2+3xy+y^2\right)\,.$$

1373. $x^4-12x^2y^2+4y^4$

$$x^4-12x^2y^2+4y^4=x^4-12x^2y^2+16x^2y^2+4y^4-16x^2y^2=x^4+4x^2y^2+4y^4-16x^2y^2=$$
$$=\left(x^2+2y^2\right)^2-(4xy)^2=\left(x^2-4xy+2y^2\right)\cdot\left(x^2+4xy+2y^2\right).$$

1374. $x^4-13x^2y^2+4y^4$

$$x^4-13x^2y^2+4y^4=x^4-13x^2y^2+9x^2y^2+4y^4-9x^2y^2=x^4-4x^2y^2+4y^4-9x^2y^2=$$
$$=\left(x^2-2y^2\right)^2-(3xy)^2=\left(x^2-3xy-2y^2\right)\cdot\left(x^2+3xy-2y^2\right).$$

Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n podana liczba nie jest kwadratem liczby całkowitej.

1375. n^2+n+1

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności
$$n^2<n^2+n+1<n^2+2n+1\,,$$
czyli
$$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2\,.$$
Ponieważ dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, sama nie może być kwadratem.

1376. n^2+4n+7

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności
$$n^2+4n+4<n^2+4n+7<n^2+6n+9\,,$$
czyli
$$(n+2)^2<n^2+4n+7<(n+3)^2\,.$$
Ponieważ dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, sama nie może być kwadratem.

1377. n^2+6n+7

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności
$$n^2+4n+4<n^2+6n+7<n^2+6n+9\,,$$
czyli
$$(n+2)^2<n^2+6n+7<(n+3)^2\,.$$
Ponieważ dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, sama nie może być kwadratem.

1378. $n^2+6n+11$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności
$$n^2+6n+9<n^2+6n+11<n^2+8n+16\,,$$
czyli
$$(n+3)^2<n^2+6n+11<(n+4)^2\,.$$
Ponieważ dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, sama nie może być kwadratem.