Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 190 (46/2018)
Piątek, 16 listopada 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1386**, **1387** i **1388** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1386. Zapisz liczbę 190 używając cyfr 1, 2, 4 i 4.

1387. Zapisz liczbę 190 używając cyfr 2, 3, 4 i 6 (każdej tylko raz). Podaj jak najwięcej różnych rozwiązań.

1388. Zapisz liczbę 190 używając cyfr 2, 4 i 8 (każdej tylko raz).

Tożsamości i nierówności

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

1389. n^3+n^2+n+1 **1390.** n^3+n^2+3n+5 **1391.** n^3+3n^2+2n+8

1392. $n^3+9n^2+26n+64$

1393. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 > 1+\frac{3}{n}\,.$$

1394. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \leqslant 1+\frac{7}{n}\,.$$

Rozwiązania zadań 1379–1385

1379. $189=7\cdot(4!+3)$ **1380.** $189=4!\cdot 8-3$ **1381.** $189=\frac{(3!)!}{4}+9$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

1382. n^2+5n+2

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^2+2n+1<n^2+5n+2<n^2+6n+9\,,$$

czyli

$$(n+1)^2<n^2+5n+2<(n+3)^2\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+1$ i $n+3$, może być kwadratem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+2)^2$. Wówczas

$$n^2+5n+2=(n+2)^2=n^2+4n+4\,,$$

czyli $n=2$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=2$.

1383. $n^2+5n+13$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^2+4n+4<n^2+5n+13<n^2+8n+16\,,$$

czyli

$$(n+2)^2 < n^2+5n+13 < (n+4)^2\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+2$ i $n+4$, może być kwadratem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+3)^2$. Wówczas

$$n^2+5n+13 = (n+3)^2 = n^2+6n+9\,,$$

czyli $n=4$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=4$.

1384. $n^2+5n+22$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^2+4n+4 < n^2+5n+22 < n^2+10n+25\,,$$

czyli

$$(n+2)^2 < n^2+5n+22 < (n+5)^2\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+2$ i $n+5$, może być kwadratem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+3)^2$ lub $(n+4)^2$. Wówczas otrzymujemy odpowiednio

$$n^2+5n+22 = (n+3)^2 = n^2+6n+9\,,$$

czyli $n=13$, oraz

$$n^2+5n+22 = (n+4)^2 = n^2+8n+16\,,$$

czyli $n=2$.

Odpowiedź: Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są $n=2$ oraz $n=13$.

1385. $n^2+5n+40$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^2+4n+4 < n^2+5n+40 < n^2+14n+49\,,$$

czyli

$$(n+2)^2 < n^2+5n+40 < (n+7)^2\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+2$ i $n+7$, może być kwadratem tylko wtedy, gdy jest równa jednej z liczb $(n+3)^2$, $(n+4)^2$, $(n+5)^2$, $(n+6)^2$. Wówczas otrzymujemy odpowiednio

$$n^2+5n+40 = (n+3)^2 = n^2+6n+9\,, \qquad \text{(skąd } n=31\text{)}$$

$$n^2+5n+40 = (n+4)^2 = n^2+8n+16\,, \qquad \text{(skąd } n=8\text{)}$$

$$n^2+5n+40 = (n+5)^2 = n^2+10n+25\,, \qquad \text{(skąd } n=3\text{)}$$

$$n^2+5n+40 = (n+6)^2 = n^2+12n+36\,. \qquad \text{(skąd } n=4/7\text{)}$$

Rozwiązanie $n=4/7$ odrzucamy, gdyż nie jest ono liczbą całkowitą.

Odpowiedź: Liczbami n spełniającymi warunki zadania są 3, 8 i 31.