Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 191 (47/2018)

Piątek, 23 listopada 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1395**, **1396** i **1397** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1395. Zapisz liczbę 191 używając cyfr 0, 5 i 7 (każdej tylko raz).

1396. Zapisz liczbę 191 używając cyfr 1, 1, 3 i 4.

1397. Zapisz liczbę 191 używając cyfr 5, 6, 6 i 6.

Tożsamości i nierówności

1398. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3<1+\frac{5}{n}\,.$$

1399. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3<1+\frac{4}{n}\,.$$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana nierówność jest prawdziwa.

1400. $n^2+n<100$

1401. $n^4+n^3<1000$

Podziały figur

1402. Podziel trójkąt o kątach 30°, 60° i 90° na dwa trójkąty równoramienne (trójkąt równoboczny uważamy za szczególny przypadek trójkąta równoramiennego).

1403. Podziel trójkąt o kątach 13°, 77° i 90° na dwa trójkąty równoramienne.

Rozwiązania zadań 1386–1394

1386. $190=2\cdot(4!\cdot4-1)$ **1387.** $190=\dfrac{((4!)^2-6}{3}=6^3-4!-2=64\cdot3-2=32\cdot6-\sqrt{4}$

1388. $190=4!\cdot8-2$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

1389. n^3+n^2+n+1

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^3<n^3+n^2+n+1<n^3+3n^2+3n+1\,,$$

czyli

$$n^3<n^3+n^2+n+1<(n+1)^3\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy sześcianami dwóch kolejnych liczb całkowitych, sama nie może być sześcianem.

Odpowiedź: Nie istnieje liczba n spełniająca warunki zadania.

1390. n^3+n^2+3n+5

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^3<n^3+n^2+3n+5<n^3+6n^2+12n+8\,,$$

czyli

$$n^3<n^3+n^2+3n+5<(n+2)^3\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy sześcianami liczb n i $n+2$, może być sześcianem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+1)^3$. Wówczas

$$n^3+n^2+3n+5=(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1\,,$$

czyli $n^2=2$, co nie jest spełnione dla żadnej liczby całkowitej n.

Odpowiedź: Nie istnieje liczba n spełniająca warunki zadania.

1391. n^3+3n^2+2n+8

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^3<n^3+3n^2+2n+8<n^3+6n^2+12n+8\,,$$

czyli

$$n^3<n^3+3n^2+2n+8<(n+2)^3\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy sześcianami liczb n i $n+2$, może być sześcianem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+1)^3$. Wówczas

$$n^3+3n^2+2n+8=(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1\,,$$

czyli $n=7$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=7$.

1392. $n^3+9n^2+26n+64$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, zachodzą nierówności

$$n^3+6n^2+12n+8<n^3+9n^2+26n+64<n^3+12n^2+48n+64\,,$$

czyli

$$(n+2)^3<n^3+9n^2+26n+64<(n+4)^3\,.$$

Skoro dana w zadaniu liczba leży pomiędzy sześcianami liczb $n+2$ i $n+4$, może być sześcianem tylko wtedy, gdy jest równa $(n+3)^3$. Wówczas

$$n^3+9n^2+26n+64=(n+3)^3=n^3+9n^2+27n+27\,,$$

czyli $n=37$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=37$.

1393. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3>1+\frac{3}{n}\,.$$

Ponieważ liczba n jest dodatnia, po zastosowaniu wzoru na sześcian sumy możemy dokonać następującego szacowania:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}>1+\frac{3}{n}+0+0=1+\frac{3}{n}\,.$$

1394. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\leqslant 1+\frac{7}{n}\,.$$

Ponieważ $n\geqslant 1$, czyli $n\leqslant n^2$ oraz $n\leqslant n^3$, po zastosowaniu wzoru na sześcian sumy możemy dokonać następującego szacowania:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\leqslant 1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n}+\frac{1}{n}=1+\frac{7}{n}\,.$$