Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 198 (2/2019)

Piątek, 11 stycznia 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1456**, **1457** i **1458** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1456. Zapisz liczbę 21 używając cyfr 5, 6 i 8 (każdej tylko raz).

1457. Zapisz liczbę 95 używając cyfr 5, 6 i 8 (każdej tylko raz).

1458. Zapisz liczbę 96 używając cyfr 5, 6 i 8 (każdej tylko raz).

Twierdzenie Pitagorasa

1459. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 35, a przeciwprostokątna 37. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

1460. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość $4n^2-1$, a przeciwprostokątna $4n^2+1$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

1461. W trapezie o wysokości 12 ramiona mają długości 15 i 20, a dolna podstawa ma długość 60. Jak jest długość górnej podstawy?

1462. Jeśli w poprzednim zadaniu wyszło Ci, że długość górnej podstawy jest jednoznacznie wyznaczona z warunków zadania, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

1463. Jeśli teraz wyszło Ci, że długość górnej podstawy może przyjmować jedną z dwóch wartości, rozwiąż zadanie jeszcze raz, tym razem naprawdę poprawnie.

Rozwiązania zadań 1446–1455

1446. $304=2^{10}-\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!$

1447. $306=102\cdot\sqrt{9}$

1448. $362=19^2+0!=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{2}+1+0!$

1449. $365=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+10}{2}$

1450. $505=\dfrac{9!}{((2+1)!)!}+0!$

1451. $510=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!-210=2^9-1-0!$

1452. $575=\left(\left(\sqrt{9}+1\right)!\right)^2-0!$

1453. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c. Podziel kwadrat o boku $a+b$ na kwadrat o boku a, kwadrat o boku b oraz cztery trójkąty prostokątne o bokach a, b, c. Następnie podziel ten sam kwadrat o boku $a+b$ na kwadrat o boku c oraz cztery trójkąty prostokątne o bokach a, b, c. Jaki związek między polami kwadratów o bokach a, b i c wynika z tych podziałów? Wywnioskuj z tego związku równość zawierającą a, b i c.

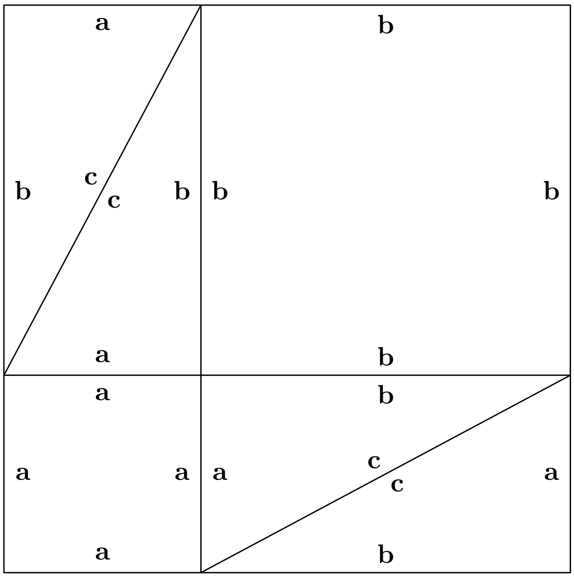
Podziały spełniające warunki zadania przedstawione są na rysunkach 1 i 2.

Z podziałów tych wynika, że pole kwadratu o boku c jest równe sumie pól kwadratów o bokach a i b, czyli

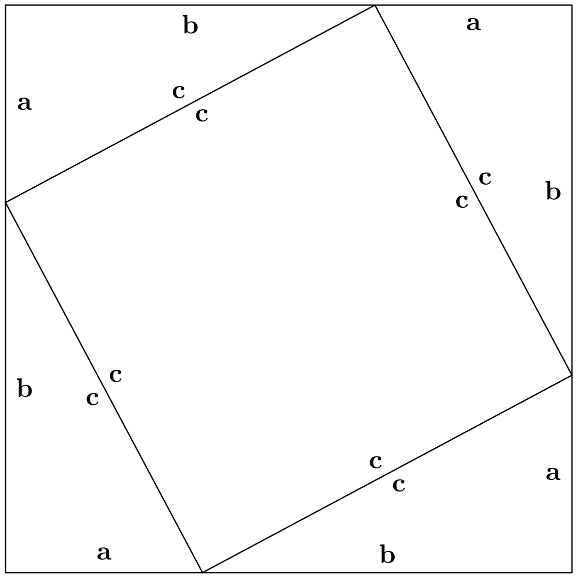
$$a^2+b^2=c^2\,.$$

Twierdzenie Pitagorasa: W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c zachodzi równość

$$a^2+b^2=c^2\,.$$



rys. 1



rys. 2

1454. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 24, a przeciwprostokątna 25. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Niech $a=24$, b oraz $c=25$ będą odpowiednio przyprostokątnymi oraz przeciwprostokątną danego trójkąta prostokątnego.

Wówczas z twierdzenia Pitagorasa wynika równość

$$b^2=c^2-a^2=25^2-24^2=(25-24)\cdot(25+24)=1\cdot 49=49=7^2\,,$$

skąd $b=7$.

Odpowiedź: Druga przyprostokątna ma długość 7.

Uwaga: W rozwiązaniu wykorzystaliśmy wzór na różnicę kwadratów, aby uniknąć obliczeń na stosunkowo dużych (trzycyfrowych) liczbach.

1455. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość $2n(n+1)$, a przeciwprostokątna $2n(n+1)+1$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Niech $a=2n(n+1)$, b oraz $c=2n(n+1)+1$ będą odpowiednio przyprostokątnymi oraz przeciwprostokątną danego trójkąta prostokątnego.

Wówczas z twierdzenia Pitagorasa wynika równość

$$b^2=c^2-a^2=\Big(2n(n+1)+1\Big)^2-\Big(2n(n+1)\Big)^2=$$

$$=\Big(2n(n+1)+1-2n(n+1)\Big)\cdot\Big(2n(n+1)+1+2n(n+1)\Big)=$$

$$=1\cdot\Big(4n(n+1)+1\Big)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2\,,$$

skąd $b=2n+1$.

Odpowiedź: Druga przyprostokątna ma długość $2n+1$.