

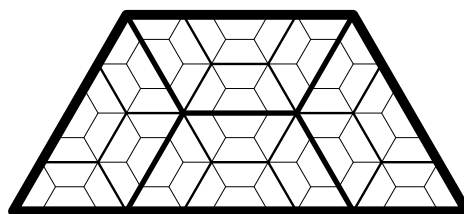
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach 1482, 1483 i 1484 oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1482. Zapisz liczbę 125 używając cyfr 8, 9 i 9.

1483. Zapisz liczbę 126 używając cyfr 8, 9 i 9. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1484. Zapisz liczbę 128 używając cyfr 8, 9 i 9.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 202 (6/2019)

Piątek, 8 lutego 2019 r.

Twierdzenie Pitagorasa

1485. W trójkącie o bokach długości a , b i c kąt między bokami długości a i b ma 120° . Wyprowadź zależność pozwalającą wyliczyć c przy znanych a i b .

1486. Dwa boki trójkąta mają długości $n^2 - 1$ i $2n + 1$, a kąt między nimi ma 120° . Oblicz długość trzeciego boku.

1487. Dwa boki trójkąta mają długości $n^2 + 2n$ i $2n + 1$, a kąt między nimi ma 60° . Oblicz długość trzeciego boku.

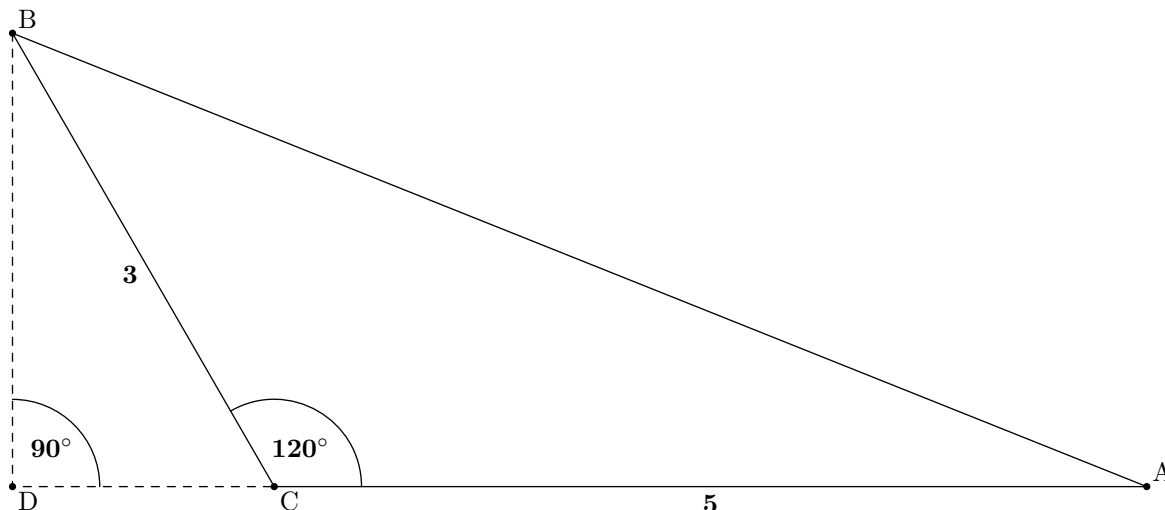
Rozwiązania zadań 1477–1481

1477. $201 = \sqrt{8! + 9 \cdot 9}$ 1478. $208 = ((\sqrt{9})!)^{\sqrt{9}} - 8$ 1479. $256 = \left(\frac{(\sqrt{9})!}{\sqrt{9}}\right)^8$

1480. Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 5, a kąt między nimi ma 120° . Oblicz długość trzeciego boku.

Oznaczmy wierzchołki trójkąta jak na rysunku 1 i opuśćmy wysokość z wierzchołka B na przedłużeniu podstawy AC .

Wówczas trójkąt BCD ma kąty 30° , 60° i 90° , jest więc połową trójkąta równobocznego. Wobec tego jego bok CD leżący naprzeciwko kąta 30° ma długość równą połowie boku BC leżącego naprzeciwko kąta prostego. Zatem $CD = 3/2$ i w konsekwencji $AD = 13/2$.



rys. 1



Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych BCD i ABD otrzymujemy odpowiednio

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

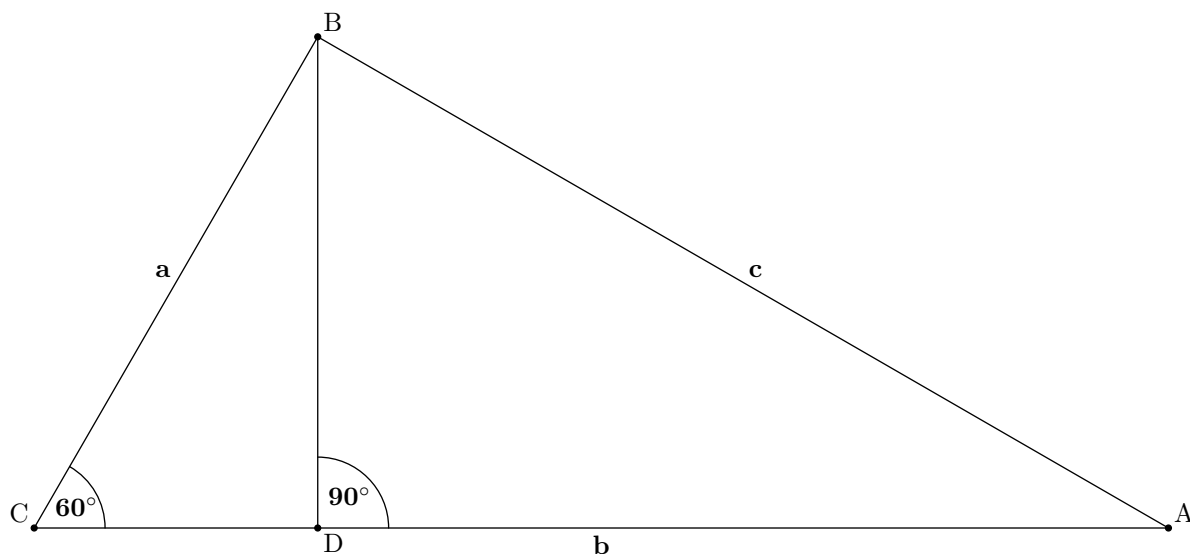
oraz

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = \frac{27}{4} + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{27 + 169}{4} = \frac{196}{4} = 49 = 7^2.$$

W konsekwencji $AB = 7$.

Odpowiedź: Trzeci bok trójkąta ma długość 7.

1481. W trójkącie o bokach długości a, b i c kąt między bokami długości a i b ma 60° . Wyprowadź zależność pozwalającą wyliczyć c przy znanych a i b .



rys. 2

Oznaczmy wierzchołki trójkąta jak na rysunku 2 i opuśćmy wysokość z wierzchołka B na podstawę AC .

Wówczas trójkąt BCD ma kąty $30^\circ, 60^\circ$ i 90° , jest więc połową trójkąta równobocznego. Wobec tego jego bok CD leżący naprzeciwko kąta 30° ma długość równą połowie boku BC leżącego naprzeciwko kąta prostego. Zatem $CD = a/2$ i w konsekwencji $AD = b - a/2$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych BCD i ABD otrzymujemy odpowiednio

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

oraz

$$c^2 = AB^2 = BD^2 + AD^2 = \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{2b - a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2 + 4b^2 - 4ab + a^2}{4} = a^2 - ab + b^2.$$

Odpowiedź: W trójkącie o bokach długości a, b i c oraz kącie 60° między bokami długości a i b zachodzi równość

$$c^2 = a^2 - ab + b^2.$$

