Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 203 (7/2019)
Piątek, 15 lutego 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1488**, **1489** i **1490** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1488. Zapisz liczbę 46 używając cyfr 8, 9 i 9.

1489. Zapisz liczbę 60 używając cyfr 8, 9 i 9.

1490. Zapisz liczbę 88 używając cyfr 8, 9 i 9.

Twierdzenie Pitagorasa

1491. Wiadomo, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma $60°$, a ponadto $AB=15$ oraz $BC=13$. Podaj dwie możliwe wartości, jakie może przyjmować długość boku AC.

1492. Dany jest deltoid wypukły $ABCD$, w którym $AB=BC=3$ oraz $CD=DA=4$, a ponadto kąty przy wierzchołkach A i C są proste. Oblicz długość przekątnej AC.

Rozwiązania zadań 1482–1487

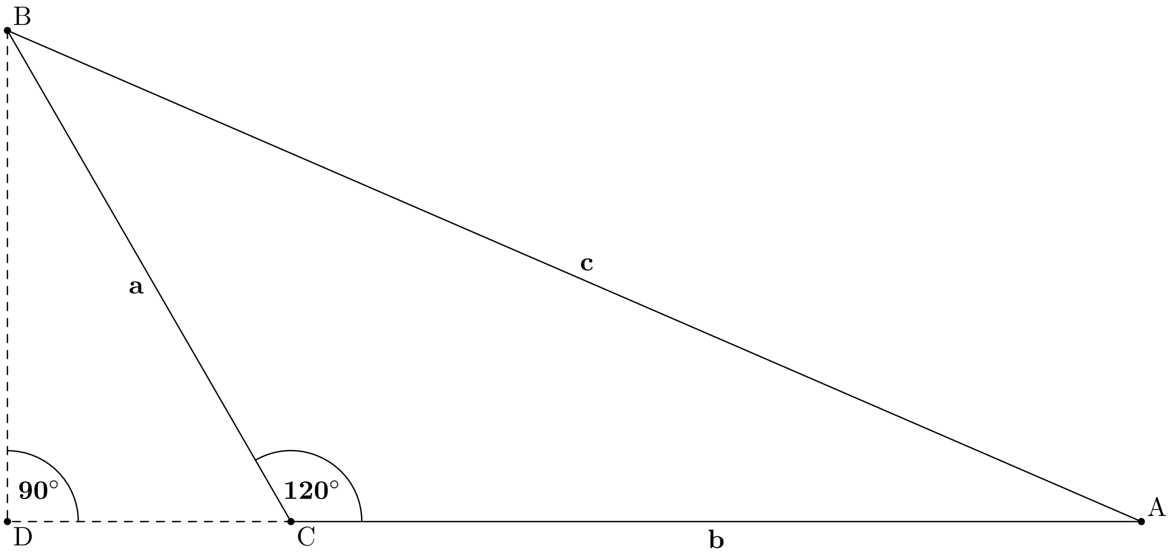
1482. $125=\left(8-\sqrt{9}\right)^{\sqrt{9}}$

1483. $126=\left(8-\sqrt{9}\right)!+\left(\sqrt{9}\right)!=9\cdot\left(8+\left(\sqrt{9}\right)!\right)$

1484. $128=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{\left(\sqrt{9}\right)!}+8$

1485. W trójkącie o bokach długości a, b i c kąt między bokami długości a i b ma $120°$. Wyprowadź zależność pozwalającą wyliczyć c przy znanych a i b.

Oznaczmy wierzchołki trójkąta jak na rysunku 1 i opuśćmy wysokość z wierzchołka B na przedłużenie podstawy AC.



rys. 1

Wówczas trójkąt BCD ma kąty $30°$, $60°$ i $90°$, jest więc połową trójkąta równobocznego. Wobec tego jego bok CD leżący naprzeciwko kąta $30°$ ma długość równą połowie boku BC leżącego naprzeciwko kąta prostego. Zatem $CD=a/2$ i w konsekwencji $AD=b+a/2$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych BCD i ABD otrzymujemy odpowiednio

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

oraz

$$c^2 = AB^2 = BD^2 + AD^2 = \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{2b+a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2+4b^2+4ab+a^2}{4} = a^2+ab+b^2\,.$$

Odpowiedź: W trójkącie o bokach długości a, b i c oraz kącie 120° między bokami długości a i b zachodzi równość

$$c^2 = a^2+ab+b^2\,.$$

1486. Dwa boki trójkąta mają długości n^2-1 i $2n+1$, a kąt między nimi ma 120°. Oblicz długość trzeciego boku.

Na podstawie zadania **1485** wiemy, że kwadrat długości trzeciego boku jest równy

$$\left(n^2-1\right)^2 + \left(n^2-1\right)\cdot(2n+1) + (2n+1)^2 = n^4-2n^2+1+2n^3+n^2-2n-1+4n^2+4n+1 =$$
$$= n^4+2n^3+3n^2+2n+1 = \left(n^2+n+1\right)^2\,,$$

skąd wynika, że trzeci bok ma długość n^2+n+1.

Odpowiedź: Trzeci bok trójkąta ma długość n^2+n+1.

Uwagi: Z powyższego rozwiązania wynika, że istnieje nieskończenie wiele niepodobnych trójkątów o jednym z kątów 120° i bokach długości całkowitej. Na przykład dla $n=2$, 3, 5 otrzymujemy odpowiednio trójkąty o bokach (3, 5, 7), (7, 8, 13), (11, 24, 31).

Powyższy wzór nie daje wszystkich możliwych przykładów, np. nie można przy jego pomocy otrzymać trójki boków (5, 16, 19). Istnieją jednak wzory generujące wszystkie możliwe trójkąty całkowitoliczbowe o jednym z kątów 120° lub 60°. Zainteresowanego tym tematem Czytelnika zachęcam do wygooglania frazy "Eisenstein triple".

1487. Dwa boki trójkąta mają długości n^2+2n i $2n+1$, a kąt między nimi ma 60°. Oblicz długość trzeciego boku.

Na podstawie zadania **1481** wiemy, że kwadrat długości trzeciego boku jest równy

$$\left(n^2+2n\right)^2 - \left(n^2+2n\right)\cdot(2n+1) + (2n+1)^2 =$$
$$= n^4+4n^3+4n^2-2n^3-4n^2-n^2-2n+4n^2+4n+1 = n^4+2n^3+3n^2+2n+1 = \left(n^2+n+1\right)^2\,,$$

skąd wynika, że trzeci bok ma długość n^2+n+1.

Odpowiedź: Trzeci bok trójkąta ma długość n^2+n+1.

Uwaga: Wnikliwy Czytelnik zauważył zapewne podobieństwa wyrażeń występujących w tym zadaniu i w poprzednim. Nie jest to przypadkowe. Istnieje bowiem ścisły związek między całkowitoliczbowymi trójkątami o kącie 120° i całkowitoliczbowymi trójkątami o kącie 60°. Każdemu trójkątowi o bokach długości a, b i c oraz kącie 120° między bokami długości a i b odpowiadają dwa trójkąty o kącie 60°. Są to trójkąty o bokach a, $a+b$, c oraz o bokach b, $a+b$, c.