Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 206 (10/2019)

Piątek, 8 marca 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1517**, **1518** i **1519** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań. **Podaj możliwie dużo rozwiązań.**

1517. Zapisz liczbę 204 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1518. Zapisz liczbę 205 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1519. Zapisz liczbę 206 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

Niezmienniki

1520. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

1521. Na tablicy napisano 2019 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczby $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Wykonujemy dozwolone ruchy, po czym okazuje się, że wszystkie liczby na tablicy są równe. Jakie to mogą być liczby?

1522. Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach elementów?

Rozwiązania zadań 1498–1516

1498. $1500=\frac{4\cdot\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+5!}{2}=\frac{4!\cdot 5^{\sqrt{9}}}{2}=2\cdot\left(\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!+\frac{5!}{4}\right)=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!\cdot\sqrt{4}+\frac{5!}{2}=\frac{\frac{9!}{5!}-4!}{2}=$
$=2\cdot\left(\sqrt{9}\right)!\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}$

1499. $1500=\frac{5\cdot(6!-5!)}{2}=(5!+5)\cdot 2\cdot 6=25\cdot\sqrt{6!\cdot 5}$

1500. $1500=(3!)!\cdot\left(2+\frac{2}{4!}\right)$

1501. $1500=(6+6)\cdot\sqrt{5^6}=6!+6!+\sqrt{6!\cdot 5}$

1502. $1500=\frac{8!-6\cdot 6!}{4!}=\left(\sqrt{4^8}-6\right)\cdot 6$

1503. $1500=4\cdot 375$

1504. $1500=\left(3^5+7\right)\cdot 6$

1505. $1500=\frac{5!\cdot(4!+1)}{2}=12\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}$

1506. $1500=\frac{7!\cdot 7+6!}{4!}$

1507. $1500=\frac{7!}{3}-\frac{6!}{4}=\frac{7!}{4}+\frac{6!}{3}$

1508. $1500=3\cdot\left(\frac{9!}{6!}-4\right)$

1509. $1500=\frac{7!+8\cdot 5!}{4}$

1510. $1500=5!\cdot\left(9+\frac{7}{\sqrt{4}}\right)$

1511. $1500=\left(4^4-6\right)\cdot 6=(6!+4!+6)\cdot\sqrt{4}$

1512. W każdym polu kwadratowej tablicy o wymiarach 9×9 znajduje się żarówka. Na każdej wewnętrznej krawędzi (tzn. wspólnym boku dwóch pól) znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) żarówek na obu polach sąsiadujących z tą krawędzią. Początkowo jedna żarówka jest zapalona, a pozostałe zgaszone. Udowodnij, że korzystając z dostępnych przełączników, nie można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

Początkowo zapalona jest jedna żarówka, czyli liczba zapalonych żarówek jest nieparzysta. Użycie któregokolwiek przełącznika zmienia stan dwóch żarówek, czyli nie zmienia parzystości liczby zapalonych żarówek. Zatem bez względu na to, jak będziemy manipulować przełącznikami, liczba zapalonych żarówek pozostanie nieparzysta, a więc nie może być równa zeru.

1513. Dany jest 13-kąt foremny. Czy można w taki sposób narysować niektóre przekątne tego 13-kąta, aby z każdego jego wierzchołka wychodziły dokładnie trzy narysowane przekątne?

Odpowiedź: Nie można.

Policzmy narysowane przekątne poprzez zliczenie liczby przekątnych wychodzących z każdego wierzchołka. Otrzymamy $13 \cdot 3 = 39$ przekątnych, przy czym każda przekątna była liczona dwukrotnie. Zatem wypełnienie warunków zadania wymaga narysowania $39/2 = 19,5$ przekątnych, co nie jest możliwe, bo liczba przekątnych musi być całkowita.

1514. Na potrzeby tego zadania zbiór składający się z co najmniej trzech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *idealnym*, jeżeli największa liczba do niego należąca jest sumą jego pozostałych elementów. Na przykład zbiór $\{1,2,3\}$ jest idealny, bo $3=1+2$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną $n>3$, dla której zbiór $\{1,2,3,\ldots,n\}$ można podzielić na zbiory idealne.

Ponieważ suma liczb należących do zbioru idealnego jest parzysta (jako równa podwojonemu największemu elementowi), nie da się podzielić na zbiory idealne zbioru złożonego z liczb o nieparzystej sumie. To oznacza, że wymagany podział nie istnieje dla $n=5,6,9,10$, gdzie zbiór $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ma sumę liczb odpowiednio równą 15, 21, 45 i 55.

W pozostałych przypadkach największe elementy zbiorów podziału muszą się sumować do połowy sumy elementów zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$, a przy tym zbiorów podziału nie może być więcej niż $n/3$.

I tak dla $n=4$ musiałby być jeden zbiór podziału, czyli $\{1,2,3,4\}$, ale $4 \neq 1+2+3$.

Dla $n=7$ i $n=8$ mogłyby być co najwyżej dwa zbiory podziału, o sumie największych elementów odpowiednio 14 i 18, co nie jest możliwe, bo każde dwa elementy zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ mają sumę nie większą od $2n-1$, czyli odpowiednio od 13 i 15.

Dla $n=11$ mogłyby być co najwyżej trzy zbiory podziału, o sumie największych elementów równej 33. Jednak każde trzy elementy zbioru $\{1,2,3,\ldots,11\}$ mają sumę nie większą od 30.

Z kolei dla $n=12$ suma największych liczb zbiorów podziału powinna być równa 39, czyli mogą to być na przykład cztery liczby: 12, 11, 10, 6. Idealnymi zbiorami spełniającymi warunki zadania są na przykład: $\{3,9,12\}$, $\{4,7,11\}$, $\{2,8,10\}$ i $\{1,5,6\}$.

Odpowiedź: Liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=12$.

1515. Na tablicy napisano liczby od 1 do 100. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczby $a+1$ i $b-1$. Czy wykonując dozwolone ruchy można doprowadzić do tego, że wszystkie liczby napisane na tablicy będą równe?

Odpowiedź: Nie można.

Wykonywane ruchy nie zmieniają sumy liczb napisanych na tablicy. Ponieważ początkowo suma liczb była równa

$$1+2+3+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)=50\cdot 101=5050\,,$$

przy równych 100 liczbach każda liczba musiałaby być równa 50,5, co jest niemożliwe, bo w każdym momencie liczby napisane na tablicy są całkowite.

1516. Na tablicy napisano liczby od 1 do 50. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $|a-b|$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Czy może to być liczba 0?

Odpowiedź: Nie może.

Dozwolony ruch nie zmienia parzystości sumy liczb napisanych na tablicy, a początkowo suma liczb była nieparzysta (bo było 25 liczb nieparzystych). Gdy na tablicy pozostanie jedna liczba, będzie ona nieparzysta.