

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1523**, **1524** i **1525** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań. **Podaj możliwie dużo rozwiązań.**

1523. Zapisz liczbę 209 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1524. Zapisz liczbę 214 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1525. Zapisz liczbę 219 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

Niezmienniki

1526. Czy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach kwadratów elementów?

1527. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od -2019 do 2019 . W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab + a + b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Wskazówka: Dla oswojenia się z zadaniem zbadaj, co będzie, jeśli początkowo na tablicy będzie 5 liczb od -2 do 2 lub 7 liczb od -3 do 3 .

1528. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od 1 do 2019 . W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab + a + b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Udowodnij, że ta liczba nie zależy od wykonywanych ruchów. Co to za liczba?

1529. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z trzech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą trójwyrazowy ciąg arytmetyczny. Inaczej: zbiór $\{a, b, c\}$ jest *fajny*, jeżeli $b - a = c - b$.

Czy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2016, 2017, 2018, 2020\}$ złożony z liczb od 1 do 2018 oraz liczby 2020 , można podzielić na 673 fajne zbiory?

1530. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z czterech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą czterowyrazowy ciąg arytmetyczny. Inaczej: zbiór $\{a, b, c, d\}$ jest *fajny*, jeżeli $b - a = c - b = d - c$.

Czy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2017, 2018, 2019, 2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021 , można podzielić na 505 fajnych zbiorów?

Rozwiązania zadań 1517–1522

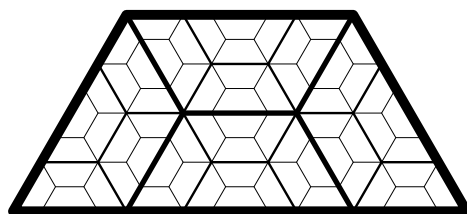
$$\mathbf{1517.} \quad 204 = 5! + 5! - 6^{\sqrt{4}} = (56 - 5) \cdot 4 = \frac{6!}{4} + \frac{5!}{5} = \frac{6!}{5} + \frac{5!}{\sqrt{4}} = 54 \cdot 6 - 5! = 6 \cdot (4! + 5 + 5) =$$

$$= 5! + 4! + \sqrt{6! \cdot 5} \quad \mathbf{1518.} \quad 205 = (46 - 5) \cdot 5 = \frac{6! + 5!}{4} - 5 = \frac{6!}{4} + 5 \cdot 5 = 5 \cdot (\sqrt{6^4} + 5)$$

$$\mathbf{1519.} \quad 206 = \frac{4^5 + 6}{5} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6^4}} - 5} - 5$$

1520. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\sqrt{a^2 + b^2}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Wykonywane ruchy nie zmieniają sumy kwadratów liczb napisanych na tablicy. Ponieważ początkowo suma kwadratów liczb była równa 100 , to gdy na tablicy zostanie jedna liczba, liczba ta musi być równa 10 .



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 207 (11/2019)

Piątek, 15 marca 2019 r.



Odpowiedź: Na tablicy pozostanie liczba 10.

1521. Na tablicy napisano 2019 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b , zmasać je, a zamiast nich napisać liczby $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Wykonujemy dozwolone ruchy, po czym okazuje się, że wszystkie liczby na tablicy są równe. Jakie to mogą być liczby?

Ponieważ

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(a^2+2ab+b^2) + (a^2-2ab+b^2)}{2} = a^2 + b^2,$$

wykonywane ruchy nie zmieniają sumy kwadratów liczb napisanych na tablicy. Ponieważ początkowo suma kwadratów liczb była równa 2019, to gdy na tablicy znowu pojawiają się równe liczby, ich suma kwadratów nadal jest równa 2019, a więc liczby te muszą być równe 1 lub -1 .

Pozostaje zauważyć, że wykonywane ruchy są odwracalne, gdyż uzyskane z a i b liczby

$$A = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

można z powrotem zamienić na

$$\frac{A+B}{\sqrt{2}} = a \quad \text{i} \quad \frac{A-B}{\sqrt{2}} = b.$$

Tak więc niezależnie od wykonanych początkowo ruchów zawsze możemy powrócić do samych jedynek.

Zauważmy też, że uzyskane z a i b liczby

$$B = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad A = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

można zamienić na

$$\frac{A+B}{\sqrt{2}} = a \quad \text{i} \quad \frac{A-B}{\sqrt{2}} = -b,$$

co oznacza, że wykonując dwa odpowiednio dobrane ruchy można zmienić znak dowolnej liczby nie zmieniając przy tym pozostałych liczb. Stąd wniosek, że możemy dojść do wszystkich liczb równych -1 .

Odpowiedź: Gdy wszystkie liczby napisane na tablicy będą równe, mogą one być równe 1 lub -1 .

1522. Czy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach elementów?

Odpowiedź: Można.

Na przykład mogą to być zbiory:

$$\{1, 5, 9, 10, 15, 16, 21, 22, 27, \dots, 2014, 2019\},$$

$$\{2, 6, 7, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \dots, 2015, 2018\},$$

$$\{3, 4, 8, 12, 13, 18, 19, 24, 25, \dots, 2016, 2017\}.$$

Pierwszy z powyższych zbiorów zawiera liczby 1, 5, 9 oraz liczby większe od 9 dające przy dzieleniu przez 6 resztę 4 lub 3. Drugi zbiór zawiera liczby 2, 6, 7 oraz liczby większe od 9 dające przy dzieleniu przez 6 resztę 5 lub 2. Natomiast trzeci zbiór zawiera liczby 3, 4, 8 oraz liczby większe od 9 dające przy dzieleniu przez 6 resztę 0 lub 1.

