Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 208 (12/2019)

Piątek, 22 marca 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1531**, **1532** i **1533** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1531. Zapisz liczbę 222 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1532. Zapisz liczbę 223 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1533. Zapisz liczbę 237 używając cyfr 4, 5, 5 i 6. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Niezmienniki

1534. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z pięciu liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny. Inaczej: zbiór $\{a,b,c,d,e\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b=d-c=e-d$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2017,2018,2019,2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021, można podzielić na 404 fajne zbiory?

1535. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $a+b+2\sqrt{ab}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

1536. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\frac{ab}{a+b}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Rozwiązania zadań 1523–1530

1523. $209=5!+4!+65=(6+5)\cdot(4!-5)$ **1524.** $214=55\cdot4-6=\sqrt{\sqrt{\sqrt{6^{5!/5}}}-\sqrt{4}}$

1525. $219=56\cdot4-5=45\cdot5-6$

1526. Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach kwadratów elementów?

Odpowiedź: Nie można.

Kwadrat liczby podzielnej przez 3 jest podzielny przez 3, a kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3. Ponieważ wśród liczb od 1 do 2019 jest 1346 liczb niepodzielnych przez 3, reszta z dzielenia liczby

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+2019^2$$

przez 3 jest taka sama, jak reszta z dzielenia liczby 1346, czyli 2. Skoro suma kwadratów liczb od 1 do 2019 nie jest podzielna przez 3, zbioru $\{1,2,3,\ldots,2019\}$ nie można podzielić na trzy zbiory o równych sumach kwadratów elementów.

1527. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od -2019 do 2019. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab+a+b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Wskazówka: Dla oswojenia się z zadaniem zbadaj, co będzie, jeśli początkowo na tablicy będzie 5 liczb od -2 do 2 lub 7 liczb od -3 do 3.

Zauważmy, że dla $a=-1$ mamy $ab+a+b=-1$, co oznacza, że po wymazaniu liczby -1 i jakiejkolwiek innej liczby, na tablicy z powrotem zapisujemy liczbę -1. Ponieważ liczba -1 jest "nieśmiertelna", to ona pozostanie na tablicy do końca.

Odpowiedź: Na tablicy pozostanie liczba -1.

1528. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od 1 do 2019. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab+a+b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Udowodnij, że ta liczba nie zależy od wykonywanych ruchów. Co to za liczba?

Przypiszmy każdej liczbie x wagę $x+1$. Udowodnimy, że dozwolony ruch nie zmienia iloczynu wag liczb zapisanych na tablicy. Istotnie, po wykonaniu dozwolonego ruchu, w miejsce liczb a i b o iloczynie wag $(a+1)\cdot(b+1)=ab+a+b+1$ na tablicy pojawia się liczba $ab+a+b$ o wadze $ab+a+b+1$.

Początkowo na tablicy są liczby od 1 do 2019 o wagach odpowiednio od 2 do 2020, co daje iloczyn wag równy 2020!. Gdy pozostanie jedna liczba, będzie ona miała właśnie wagę 2020!, co oznacza, że sama liczba jest o 1 mniejsza.

Odpowiedź: Na tablicy pozostanie liczba $2020!-1$.

1529. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z trzech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą trójwyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2016,2017,2018,2020\}$ złożony z liczb od 1 do 2018 oraz liczby 2020, można podzielić na 673 fajne zbiory?

Odpowiedź: Nie można.

Jeżeli

$$b-a=c-b=r\,,$$

to

$$a=b-r \qquad \text{oraz} \qquad c=b+r\,,$$

skąd

$$a+b+c=(b-r)+b+(b+r)=3b\,.$$

Zatem suma elementów fajnego zbioru jest podzielna przez 3. Tymczasem suma liczb należących do zbioru podanego w zadaniu nie jest podzielna przez 3.

1530. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z czterech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą czterowyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c,d\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b=d-c$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2017,2018,2019,2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021, można podzielić na 505 fajnych zbiorów?

Odpowiedź: Nie można.

Jeżeli

$$b-a=c-b=d-c=r\,,$$

to

$$a=b-r \qquad \text{oraz} \qquad d=c+r\,,$$

skąd

$$a+b+c+d=(b-r)+b+c+(d+r)=2\cdot(b+c)\,.$$

Zatem suma elementów fajnego zbioru jest parzysta. Tymczasem suma liczb należących do zbioru podanego w zadaniu jest nieparzysta.