Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 209 (13/2019)
Piątek, 29 marca 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1537**, **1538** i **1539** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1537. Zapisz liczbę 301 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1538. Zapisz liczbę 302 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1539. Zapisz liczbę 303 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

Niezmienniki

1540. Na Wyspach Bergamutach podobno żyje 2019 alfaurów, 2020 betaurów i 2021 centaurów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta różnych gatunków, zamieniają się w zwierzęta trzeciego gatunku (np. po spotkaniu beatura i centaura, obydwa zamieniają się w alfaury).

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach nie mogą pozostać zwierzęta tylko jednego gatunku.

1541. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z trzech gatunków: alfaurów, betaurów i centaurów.

- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
- Gdy alfaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 2 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

1542. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z czterech gatunków: alfaurów, betaurów, centaurów i deltaurów.

- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w deltaura.
- Gdy deltaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
- Gdy alfaur spotyka deltaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 2 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

1543. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z pięciu gatunków: alfaurów, betaurów, centaurów, deltaurów i elfaurów.

- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w deltaura.
- Gdy deltaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w elfaura.
- Gdy elfaur spotyka deltaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
- Gdy alfaur spotyka elfaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 3 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

Rozwiązania zadań 1531–1536

1531. $222=5!+5!-4!+6$

1532. $223=\sqrt{\left(5+\sqrt{4}\right)^6-5!}$

1533. $237=\sqrt{(4+5)^5}-6=\left(5-\sqrt{4}\right)^5-6=5!+5!-\dfrac{6}{\sqrt{4}}$

1534. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z pięciu liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c,d,e\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b=d-c=e-d$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2017,2018,2019,2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021, można podzielić na 404 fajne zbiory?

Odpowiedź: Nie można.

Jeżeli
$$b-a=c-b=d-c=e-d=r\,,$$
to
$$a=c-2r,\qquad b=c-r,\qquad d=c+r\qquad \text{oraz}\qquad e=c+2r\,,$$
skąd
$$a+b+c+d+e=(c-2r)+(c-r)+c+(c+r)+(c+2r)=5c\,.$$
Zatem suma elementów fajnego zbioru jest podzielna przez 5. Tymczasem suma liczb należących do zbioru podanego w zadaniu nie jest podzielna przez 5, gdyż przez 5 jest podzielna suma $1+2+3+\ldots+2018+2019+2020$, a suma liczb z danego zbioru jest od niej o 1 większa.

1535. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $a+b+2\sqrt{ab}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Ponieważ na tablicy cały czas występują tylko liczby dodatnie, a dla dodatnich a i b zachodzi równość
$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\,,$$
wykonywane ruchy nie zmieniają sumy pierwiastków kwadratowych liczb napisanych na tablicy. Ponieważ początkowo suma pierwiastków kwadratowych była równa 100, to gdy na tablicy zostanie jedna liczba, musi mieć ona pierwiastek kwadratowy równy 100, czyli sama musi być równa 10 000.

Odpowiedź: Na tablicy pozostanie liczba 10 000.

1536. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\frac{ab}{a+b}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

Ponieważ na tablicy cały czas występują tylko liczby dodatnie, a dla dodatnich a i b zachodzi równość
$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b}}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\,,$$
wykonywane ruchy nie zmieniają sumy odwrotności liczb napisanych na tablicy. Ponieważ początkowo suma odwrotności była równa 100, to gdy na tablicy zostanie jedna liczba, musi mieć ona odwrotność równą 100, czyli sama musi być równa 1/100.

Odpowiedź: Na tablicy pozostanie liczba 1/100.