Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1544**, **1545** i **1546** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań. **Podaj możliwie dużo rozwiązań.**

1544. Zapisz liczbę 305 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1545. Zapisz liczbę 306 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

1546. Zapisz liczbę 309 używając cyfr 4, 5, 5 i 6.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 210 (14/2019)
Piątek, 5 kwietnia 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

Wracamy do tematu nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną, tym razem w nieco innym wydaniu. Z konieczności pewne rzeczy (chociaż niewiele) zostaną powtórzone.

Przypomnienie: Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}, \qquad \text{czyli} \qquad xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 .$$

Uwaga: W prawej nierówności (i w niektórych występujących dalej w tym cyklu) założenie dodatniości liczb nie jest istotne, dokładamy je jednak, aby móc swobodnie używać pojęcia średniej geometrycznej.

Rozwiązania zadań 1537–1542

1537. $301 = 65 \cdot 5 - 4!$

1538. $302 = 5 \cdot \sqrt{6! \cdot 5} + \sqrt{4} = \sqrt{6! \cdot (5! + 5)} + \sqrt{4}$

1539. $303 = \dfrac{5! \cdot 5 + 6}{\sqrt{4}}$

1540. Na Wyspach Bergamutach podobno żyje 2019 alfaurów, 2020 betaurów i 2021 centaurów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta różnych gatunków, zamieniają się w zwierzęta trzeciego gatunku (np. po spotkaniu beatura i centaura, obydwa zamieniają się w alfaury).

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach nie mogą pozostać zwierzęta tylko jednego gatunku.

Każdemu ze zwierząt przypiszmy liczbę, zwaną dalej wagą, w/g następujących zasad:
- Każdemu alfaurowi przypisujemy wagę 0.
- Każdemu betaurowi przypisujemy wagę 1.
- Każdemu centaurowi przypisujemy wagę 2.

Zauważmy, że przy przemianach zwierząt zgodnie z opisaną regułą, nie zmienia się reszta z dzielenia sumy wag wszystkich zwierząt przez 3.

Początkowo suma wag zwierząt jest równa

$$2019 \cdot 0 + 2020 \cdot 1 + 2021 \cdot 2 = 6062\,,$$

czyli przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2 i ta własność sumy wag nigdy nie ulegnie zmianie. Tymczasem 6060 zwierząt jednego gatunku miałoby sumę wag podzielną przez 3, a więc dojście do takiej sytuacji nie jest możliwe.

1541. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z trzech gatunków: alfaurów, betaurów i centaurów.
- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w alfaura.

• Gdy alfaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 2 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

Na początku liczby zwierząt poszczególnych gatunków są tej samej parzystości. Każda z dopuszczalnych przemian zmienia parzystość liczby zwierząt każdego gatunku, więc nadal liczebności wszystkich gatunków będą tej samej parzystości.

Nie jest więc możliwe pozostanie tylko jednego zwierzęcia, bo jego gatunek miałby nieparzystą liczbę osobników (1), a każdy z pozostałych dwóch gatunków miałby parzyście wiele przedstawicieli (0).

1542. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z czterech gatunków: alfaurów, betaurów, centaurów i deltaurów.

• Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
• Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w deltaura.
• Gdy deltaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
• Gdy alfaur spotyka deltaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 2 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

Każdemu spośród zwierząt znajdujących się na Wyspach Bergamutach przypiszmy pewną liczbę (wagę) w zależności od tego, jakiego jest gatunku. Jeżeli alfaurowi przypiszemy wagę a, a betaurowi wagę b, to centaurowi powinniśmy przypisać wagę $a+b$, deltaurowi wagę $a+2b$, alfaurowi $2a+3b$, betaurowi $3a+5b$, skąd wynika, że powinny zachodzić równości

$$a=2a+3b \qquad \text{oraz} \qquad b=3a+5b\,,$$

czyli

$$0=a+3b \qquad \text{oraz} \qquad 0=3a+4b\,.$$

Wobec tego powinny zachodzić równości

$$0=4a+12b \qquad \text{oraz} \qquad 0=9a+12b\,.$$

skąd $4a=9a$, czyli $5a=0$.

Przyjęcie $a=0$ doprowadzi do wszystkich wag równych 0, które to wagi są zupełnie nieprzydatne. Jeśli jednak przyjmiemy $a=1$, to równość $5a=0$ daje się uratować poprzez zadeklarowanie, że interesuje nas tylko reszta z dzielenia wag przez 5, a wszystkie powyższe rachunki rozważane są modulo 5.

W konsekwencji przypiszemy zwierzętom następujące wagi:

1 — alfaur, **3** — betaur, **4** — centaur, **2** — deltaur.

Zauważmy, że początkowo suma wag przypisanych zwierzętom jest równa

$$2019\cdot(1+3+4+2)=2\cdot 5\cdot 2019\,,$$

czyli jest podzielna przez 5, zaś w wyniku każdej z opisanych przemian reszta z dzielenia tej sumy przez 5 nie ulega zmianie. To oznacza, że po dowolnym ciągu przemian opisanych w treści zadania suma wag przypisanych zwierzętom będzie podzielna przez 5.

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że waga pojedynczego zwierzęcia nie jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie zadania **1543** zostanie zamieszczone w kolejnym **Trapezie.**