Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 211 (15/2019)
Piątek, 12 kwietnia 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1547**, **1548** i **1549** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1547. Zapisz liczbę 211 używając cyfr 4, 4 i 7.

1548. Zapisz liczbę 211 używając cyfr 0, 2, 3 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1549. Zapisz liczbę 211 używając cyfr 2, 3, 5 i 5. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Nierówność między średnimi (AG) – dla początkujących

Definicja: Średnią arytmetyczną liczb x_1, x_2, x_3, … ,x_n nazywamy liczbę
$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\,.$$

Definicja: Średnią geometryczną liczb dodatnich x_1, x_2, x_3, … ,x_n nazywamy liczbę
$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}\,.$$

W kolejnych **Trapezach** udowodnimy dla wybranych wartości n nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, x_3, … ,x_n zachodzi nierówność
$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\,.$$

Inna wersja:
$$x_1x_2x_3\ldots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n\,.$$

Innymi słowy, iloczyn n liczb rzeczywistych dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

Uwaga: W powyższych nierównościach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby x_1, x_2, x_3, … ,x_n są równe.

1550. Nierówność między średnimi dla 4 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność
$$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant\frac{x+y+z+t}{4}\,,\qquad\text{czyli}\qquad xyzt\leqslant\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4\,.$$

1551. Nierówność między średnimi dla 8 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h zachodzi nierówność
$$\sqrt[8]{abcdefgh}\leqslant\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\,.$$

1552. Nierówność między średnimi dla 3 liczb, z których dwie najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x\leqslant y$ zachodzi nierówność
$$\sqrt[3]{x^2y}\leqslant\frac{2x+y}{3}\,.$$

Wskazówka: Oznacz $r=y-x\geqslant 0$ i podstaw $y=x+r$.

1553. Nierówność między średnimi dla 3 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}\,.$$

Wskazówka: Załóż, że $x \leqslant y \leqslant z$ i skorzystaj z nierówności między średnimi dla liczb x i y.

Rozwiązania zadań 1543–1546

1543. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2019 zwierząt każdego z pięciu gatunków: alfaurów, betaurów, centaurów, deltaurów i elfaurów.

- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w deltaura.
- Gdy deltaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w elfaura.
- Gdy elfaur spotyka deltaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
- Gdy alfaur spotyka elfaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 3 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

Każdemu spośród zwierząt znajdujących się na Wyspach Bergamutach przypiszmy pewną liczbę (wagę) w zależności od tego, jakiego jest gatunku. Jeżeli alfaurowi przypiszemy wagę a, a betaurowi wagę b, to centaurowi powinniśmy przypisać wagę $a+b$, deltaurowi wagę $a+2b$, elfaurowi $2a+3b$, alfaurowi $3a+5b$, betaurowi $5a+8b$, skąd wynika, że powinny zachodzić równości

$$a=3a+5b \qquad \text{oraz} \qquad b=5a+8b\,,$$

czyli

$$0=2a+5b \qquad \text{oraz} \qquad 0=5a+7b\,.$$

Wobec tego powinny zachodzić równości

$$0=14a+35b \qquad \text{oraz} \qquad 0=25a+35b\,.$$

skąd $14a=25a$, czyli $11a=0$.

Przyjęcie $a=0$ doprowadzi do wszystkich wag równych 0, które to wagi są zupełnie nieprzydatne. Jeśli jednak przyjmiemy $a=1$, to równość $11a=0$ daje się uratować poprzez zadeklarowanie, że interesuje nas tylko reszta z dzielenia wag przez 11, a wszystkie powyższe rachunki rozważane są modulo 11.

W konsekwencji przypiszemy zwierzętom następujące wagi:

1 — alfaur, **4** — betaur, **5** — centaur, **9** — deltaur, **3** — elfaur.

Zauważmy, że początkowo suma wag przypisanych zwierzętom jest równa

$$2019\cdot(1+4+5+9+3)=2\cdot 11\cdot 2019\,,$$

czyli jest podzielna przez 11, zaś w wyniku każdej z opisanych przemian reszta z dzielenia tej sumy przez 11 nie ulega zmianie. To oznacza, że po dowolnym ciągu przemian opisanych w treści zadania suma wag przypisanych zwierzętom będzie podzielna przez 11.

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że żadna z liczb 1, 4, 5, 9, 3, ani żadna suma dwóch z tych liczb (niekoniecznie różnych) nie jest podzielna przez 11.

1544. $305=5!\cdot\sqrt{4}+65=\dfrac{6!}{\sqrt{4}}-55=5\cdot(65-4)=\sqrt{6!\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}+5}=\dfrac{6!-5!}{\sqrt{4}}+5=\dfrac{6!}{4}+5!+5$

1545. $306=6\cdot(55-4)=55\cdot 6-4!=\dfrac{5!\cdot 5}{\sqrt{4}}+6$

1546. $309=4^5-6!+5$