Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 212 (16/2019)
Środa, 17 kwietnia 2019 r.

Łamigłówki i zadania na Święta

W łamigłówkach **1554**, **1555** i **1556** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1554. Zapisz liczbę 89 używając cyfr 1, 1, 1 i 3.

1555. Zapisz liczbę 89 używając cyfr 1, 1, 3 i 3.

1556. Zapisz liczbę 89 używając cyfr 6, 8 i 8.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

1557. Nierówność między średnimi dla 6 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt[6]{abcdef} \leqslant \frac{a+b+c+d+e+f}{6}\,.$$

1558. Nierówność między średnimi dla 9 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h, i zachodzi nierówność

$$\sqrt[9]{abcdefghi} \leqslant \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}\,.$$

1559. Nierówność między średnimi dla 5 liczb, z których cztery najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x \leqslant y$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{x^4y} \leqslant \frac{4x+y}{5}\,.$$

Rozwiązania zadań 1547–1553

1547. $211 = \dfrac{7!+4!}{4!}$

1548. $211 = 3\cdot\sqrt{7!+0!}-2 = \dfrac{7!}{(3!-2)!}+0!$

1549. $211 = 3^5-2^5 = (3!)^{5-2}-5$

1550. **Nierówność między średnimi dla 4 liczb.** Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x+y+z+t}{4}\,, \qquad \text{czyli} \qquad xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4.$$

Korzystając trzykrotnie z nierówności $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ otrzymujemy

$$\sqrt[4]{xyzt} = \sqrt{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{zt}} \leqslant \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zt}}{2} \leqslant \frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+t}{2}}{2} = \frac{x+y+z+t}{4}\,.$$

1551. **Nierówność między średnimi dla 8 liczb.** Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h zachodzi nierówność

$$\sqrt[8]{abcdefgh} \leqslant \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\,.$$

Korzystając jednokrotnie z nierówności $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ oraz dwukrotnie z nierówności $\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \dfrac{x+y+z+t}{4}$ otrzymujemy

$$\sqrt[8]{abcdefgh} = \sqrt{\sqrt[4]{abcd}\cdot\sqrt[4]{efgh}} \leqslant \frac{\sqrt[4]{abcd}+\sqrt[4]{efgh}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{a+b+c+d}{4}+\frac{e+f+g+h}{4}}{2}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\,.$$

1552. Nierówność między średnimi dla 3 liczb, z których dwie najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x\leqslant y$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{x^2y}\leqslant\frac{2x+y}{3}\,.$$

Wskazówka: Oznacz $r=y-x\geqslant 0$ i podstaw $y=x+r$.

Po skorzystaniu ze wskazówki dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$\sqrt[3]{x^2\cdot(x+r)}\leqslant\frac{2x+(x+r)}{3}\,,$$

czyli

$$\sqrt[3]{x^3+x^2r}\leqslant x+\frac{r}{3}\,.$$

Podnosząc powyższą nierówność obustronnie do sześcianu otrzymujemy nierówność równoważną:

$$x^3+x^2r\leqslant\left(x+\frac{r}{3}\right)^3\,,$$

która po zastosowaniu do prawej strony wzoru na sześcian sumy przybiera postać

$$x^3+x^2r\leqslant x^3+x^2r+\frac{xr^2}{3}+\frac{r^3}{27}\,,$$

czyli

$$0\leqslant\frac{xr^2}{3}+\frac{r^3}{27}\,.$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa, gdyż jej prawa strona jest nieujemna. Ponieważ jednocześnie ta nierówność jest równoważna dowodzonej nierówności, rozwiązanie zadania jest zakończone.

1553. Nierówność między średnimi dla 3 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}\,.$$

Wskazówka: Załóż, że $x\leqslant y\leqslant z$ i skorzystaj z nierówności między średnimi dla liczb x i y.

Zgodnie ze wskazówką załóżmy, że $x\leqslant y\leqslant z$. Korzystając z nierówności $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\cdot z}\,.$$

Ponieważ $\frac{x+y}{2}\leqslant z$, z nierówności z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\cdot z}\leqslant\frac{2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)+z}{3}=\frac{x+y+z}{3}\,.$$