

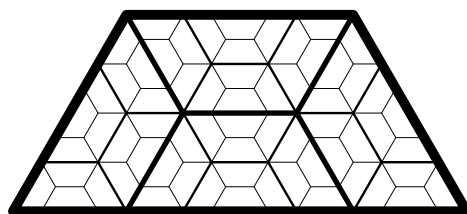
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1560**, **1561** i **1562** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1560. Zapisz liczbę 336 używając cyfr 3, 3 i 8.

1561. Zapisz liczbę 1120 używając cyfr 3, 3 i 8.

1562. Zapisz liczbę $3^{10} = 59049$ używając cyfr 3, 3 i 8.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 213 (17/2019)

Piątek, 26 kwietnia 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) – dla początkujących

1563. Nierówność między średnimi dla 5 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, s, t zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{xyzst} \leq \frac{x+y+z+s+t}{5}.$$

1564. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b \leq 2a^3 + b^3.$$

1565. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3.$$

1566. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b \leq a^3 + 4b^3.$$

1567. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12a^2b \leq 16a^3 + b^3.$$

Rozwiązania zadań 1554–1559

1554. $89 = \sqrt{(3!)! \cdot 11 + 1}$

1555. $89 = (3! - 1)! - 31$

1556. $89 = \frac{6! - 8}{8}$

1557. Nierówność między średnimi dla 6 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt[6]{abcdef} \leq \frac{a+b+c+d+e+f}{6}.$$

Korzystając jednokrotnie z nierówności $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ oraz dwukrotnie z nierówności $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{abcdef} &= \sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{def}} \leq \frac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{def}}{2} \leq \\ &\leq \frac{\frac{a+b+c}{3} + \frac{d+e+f}{3}}{2} = \frac{a+b+c+d+e+f}{6}. \end{aligned}$$



1558. Nierówność między średnimi dla 9 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[9]{abcde fghi} \leq \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

Korzystając czterokrotnie z nierówności $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{abcde fghi} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{def} \cdot \sqrt[3]{ghi}} \leq \frac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{def} + \sqrt[3]{ghi}}{3} \leq \\ &\leq \frac{\frac{a+b+c}{3} + \frac{d+e+f}{3} + \frac{g+h+i}{3}}{3} = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}. \end{aligned}$$

1559. Nierówność między średnimi dla 5 liczb, z których cztery najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x \leq y$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{x^4 y} \leq \frac{4x+y}{5}.$$

Oznaczmy $r = y - x \geq 0$ i podstawmy $y = x + r$. Wówczas dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$\sqrt[5]{x^4 \cdot (x+r)} \leq \frac{4x + (x+r)}{5},$$

czyli

$$\sqrt[5]{x^5 + x^4 r} \leq x + \frac{r}{5},$$

Podnosząc powyższą nierówność obustronnie do piątej potęgi otrzymujemy nierówność równoważną:

$$x^5 + x^4 r \leq \left(x + \frac{r}{5}\right)^5,$$

która po zastosowaniu do prawej strony wzoru na piątą potęgę sumy przybiera postać

$$x^5 + x^4 r \leq x^5 + x^4 r + \text{składniki nieujemne}.$$

Otrzymana nierówność jest więc prawdziwa. Ponieważ jednocześnie ta nierówność jest równoważna dowodzonej nierówności, rozwiązanie zadania jest zakończone.

Uwaga

Wzór na piątą potęgę sumy, o którym mowa w rozwiązaniu, ma postać

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Zgodnie z tym wzorem

$$\left(x + \frac{r}{5}\right)^5 = x^5 + x^4 r + \frac{2x^3 r^2}{5} + \frac{2x^2 r^3}{25} + \frac{xr^4}{125} + \frac{r^5}{3125}.$$

Jednak do rozwiązania zadania nie jest konieczne ani dokładne wypisywanie powyższego rozwinięcia, ani nawet dokładna znajomość wzoru na sumę piątych potęg! Wystarczy bowiem wiedzieć, że

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \dots a^3b^2 + \dots a^2b^3 + \dots ab^4 + \dots b^5,$$

gdzie w miejscu kropek występują jakieś liczby dodatnie.

