Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 214 (18/2019)

Czwartek, 2 maja 2019 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **1568**, **1569** i **1570** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1568. Zapisz liczbę 141 używając cyfr 1, 3, 3 i 3.

1569. Zapisz liczbę 151 używając cyfr 1, 3, 3 i 3.

1570. Zapisz liczbę 161 używając cyfr 1, 3, 3 i 3. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Nierówność między średnimi (AG) – dla początkujących

1571. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12\cdot\left(a^2b+ab^2\right)\leqslant 5a^3+32b^3\,.$$

Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

1572. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b\leqslant\frac{a^3+b^3}{2}\,.$$

Rozwiązania zadań 1560–1567

1560. $336=\dfrac{8!\cdot 3!}{(3!)!}$ **1561.** $1120=\dfrac{8!}{3!\cdot 3!}$ **1562.** $3^{10}=59049=\left(3\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\right)^8$

1563. **Nierówność między średnimi dla 5 liczb.** Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, s, t zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{xyzst}\leqslant\frac{x+y+z+s+t}{5}\,.$$

Załóżmy, że $x\leqslant y\leqslant z\leqslant s\leqslant t$. Korzystając z nierówności między średnimi dla liczb x, y, z, s otrzymujemy

$$\sqrt[5]{xyzst}\leqslant\sqrt[5]{\left(\frac{x+y+z+s}{4}\right)^4\cdot t}\,.$$

Ponieważ $\dfrac{x+y+z+s}{4}\leqslant t$, z nierówności z zadania **1559** otrzymujemy

$$\sqrt[5]{\left(\frac{x+y+z+s}{4}\right)^4\cdot t}\leqslant\frac{4\cdot\left(\frac{x+y+z+s}{4}\right)+t}{5}=\frac{x+y+z+s+t}{5}\,.$$

1564. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b\leqslant 2a^3+b^3\,.$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb a^3, a^3, b^3 otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}\leqslant\frac{2a^3+b^3}{3}\,,$$

czyli

$$a^2b \leqslant \frac{2a^3+b^3}{3}\,. \tag{1}$$

Przemnożenie stronami nierówności (1) przez 3 daje nierówność z treści zadania.

1565. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b+ab^2 \leqslant a^3+b^3\,.$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb a^3, a^3, b^3 otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3} \leqslant \frac{2a^3+b^3}{3}\,,$$

czyli

$$a^2b \leqslant \frac{2a^3+b^3}{3}\,. \tag{2}$$

Analogicznie otrzymujemy nierówność

$$ab^2 \leqslant \frac{a^3+2b^3}{3}\,. \tag{3}$$

Dodanie stronami nierówności (2) i (3) daje nierówność z treści zadania.

1566. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b \leqslant a^3+4b^3\,.$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $\frac{a^3}{2}$, $\frac{a^3}{2}$, $4b^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3} \leqslant \frac{a^3+4b^3}{3}\,,$$

czyli

$$a^2b \leqslant \frac{a^3+4b^3}{3}\,. \tag{4}$$

Przemnożenie stronami nierówności (4) przez 3 daje nierówność z treści zadania.

1567. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12a^2b \leqslant 16a^3+b^3\,.$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $2a^3$, $2a^3$, $\frac{b^3}{4}$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3} \leqslant \frac{4a^3+\frac{b^3}{4}}{3}\,,$$

czyli

$$a^2b \leqslant \frac{16a^3+b^3}{12}\,. \tag{5}$$

Przemnożenie stronami nierówności (5) przez 12 daje nierówność z treści zadania.