Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 215 (19/2019)
Piątek, 10 maja 2019 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1573**, **1574** i **1575** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1573. Zapisz liczbę 101 używając cyfr 4, 7 i 7.

1574. Zapisz liczbę 112 używając cyfr 4, 7 i 7.

1575. Zapisz liczbę 113 używając cyfr 4, 7 i 7.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

1576. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b \leqslant \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\left(a^3+b^3\right).$$

1577. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b+ab^4 \leqslant a^5+b^5.$$

1578. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^3b^2+a^2b^3 \leqslant a^5+b^5.$$

1579. Prostopadłościan ma pole powierzchni całkowitej równe P, a jego objętość jest równa V. Udowodnij, że

$$V^2 \leqslant \frac{P^3}{216}.$$

Rozwiązania zadań 1568–1572

1568. $141=(1+3)!\cdot 3!-3=\dfrac{(3!)!}{3!-1}-3$

1569. $151=\dfrac{(3!)!}{3!}+31$

1570. $161=3!\cdot 3^3-1=\sqrt{(3!)!\cdot 3!\cdot 3!+1}$

1571. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12\cdot\left(a^2b+ab^2\right)\leqslant 5a^3+32b^3.$$

Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $\dfrac{a^3}{2}$, $\dfrac{a^3}{2}$, $4b^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}\leqslant\frac{a^3+4b^3}{3},$$

czyli

$$a^2b\leqslant\frac{a^3+4b^3}{3}. \tag{1}$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $\frac{a^3}{4}$, $2b^3$, $2b^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot b^3}\leqslant \frac{\frac{a^3}{4}+4b^3}{3}\,,$$

czyli

$$ab^2\leqslant \frac{a^3+16b^3}{12}\,. \qquad (2)$$

Dodanie stronami nierówności (1) i (2) prowadzi do

$$a^2b+ab^2\leqslant \frac{a^3+4b^3}{3}+\frac{a^3+16b^3}{12}=\frac{5a^3+32b^3}{12}\,,$$

co po obustronnym przemnożeniu przez 12 daje nierówność z treści zadania.

W udowodnionej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość w obu nierównościach (1) i (2). Ponieważ nierówności te powstały z zastosowania nierówności między średnimi do pewnych dwóch trójek liczb, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych trójek składa się z równych liczb, czyli

$$\frac{a^3}{2}=4b^3 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a^3}{4}=2b^3\,. \qquad (3)$$

Nietrudno stwierdzić, że warunek (3) sprowadza się do $a=2b$. Wobec tego przykładem pary liczb całkowitych, dla których dowodzona nierówność staje się równością, są liczby $a=2$ i $b=1$. Wówczas każda ze stron nierówności przyjmuje wartość 72.

1572. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b\leqslant \frac{a^3+b^3}{2}\,.$$

Podana nierówność nie jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, co udowodnimy wskazując liczby a, b, dla których jest ona fałszywa.

Na przykład dla $a=3$ i $b=2$ nierówność przyjmuje postać

$$18\leqslant \frac{35}{2}\,,$$

jest więc fałszywa.

Uwaga: Podane wyżej rozwiązanie nie wyjaśnia jak znaleźć odpowiedni przykład inaczej niż metodą prób i błędów. Otóż można przyjąć $r=b-a$, czyli $b=a+r$. Wówczas dana nierówność może być sprowadzona do postaci

$$a^3+ra^2\leqslant a^3+\frac{3}{2}\cdot ra^2+\frac{3}{2}\cdot r^2a+\frac{1}{2}\cdot r^3\,,$$

czyli

$$0\leqslant \frac{1}{2}\cdot ra^2+\frac{3}{2}\cdot r^2a+\frac{1}{2}\cdot r^3\,. \qquad (4)$$

Można oczekiwać, że jeśli r jest liczbą ujemną o bardzo małej wartości bezwzględnej, to pierwszy składnik sumy po prawej stronie nierówności (4) jest ujemny i jednocześnie znacznie większy co do wartości bezwzględnej od pozostałych dwóch składników. Wobec tego prawa strona nierówności (4) powinna być ujemna, a sama nierówność fałszywa.

To oznacza, że przykładu powinniśmy szukać wśród takich par liczb a, b, że liczba a jest nieznacznie większa od b.