

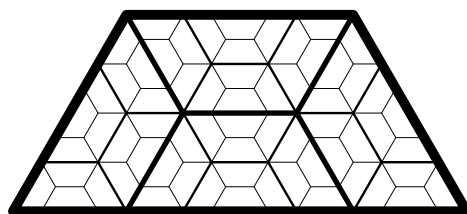
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1580**, **1581** i **1582** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1580. Zapisz liczbę 25 używając cyfr 4, 7 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1581. Zapisz liczbę 175 używając cyfr 4, 7 i 7.

1582. Zapisz liczbę 350 używając cyfr 4, 7 i 7.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 216 (20/2019)

Piątek, 17 maja 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) – dla początkujących

1583. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b + a^2b^3 \leq a^5 + b^5.$$

1584. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x \leq x^5 + 4.$$

1585. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x^3 \leq 3x^5 + 2.$$

1586. Udowodnij nierówność $\sqrt[10]{2} < \frac{11}{10}$.

Rozwiązania zadań 1573–1579

1573. $101 = 77 + 4!$

1574. $112 = \left(\sqrt{\sqrt{7}} + \sqrt{\sqrt{7}} \right)^4$

1575. $113 = (7 - \sqrt{4})! - 7$

1576. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot (a^3 + b^3).$$

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $\frac{a^3}{2}, \frac{a^3}{2}, b^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3}{4}} \leq \frac{a^3 + b^3}{3},$$

czyli

$$\frac{a^2b}{\sqrt[3]{4}} \leq \frac{a^3 + b^3}{3}. \quad (1)$$

Mnożąc stronami nierówność (1) przez $\sqrt[3]{4}$ otrzymujemy nierówność z treści zadania.

Uwaga: Stała $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ występująca po prawej stronie dowodzonej nierówności nie może być zastąpiona mniejszą, gdyż przy $a = b\sqrt[3]{2}$ nierówność ta staje się równością.



1577. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b + ab^4 \leq a^5 + b^5.$$

Stosujemy nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do następujących pięciu liczb: a^5, a^5, a^5, a^5, b^5 . Otrzymujemy

$$\sqrt[5]{a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 \cdot b^5} \leq \frac{4a^5 + b^5}{5},$$

czyli

$$a^4b \leq \frac{4a^5 + b^5}{5}. \quad (2)$$

Analogicznie otrzymujemy nierówność

$$ab^4 \leq \frac{a^5 + 4b^5}{5}. \quad (3)$$

Dodanie stronami nierówności (2) i (3) daje nierówność z treści zadania.

1578. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^3b^2 + a^2b^3 \leq a^5 + b^5.$$

Stosujemy nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do następujących pięciu liczb: a^5, a^5, a^5, b^5, b^5 . Otrzymujemy

$$\sqrt[5]{a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot b^5} \leq \frac{3a^5 + 2b^5}{5},$$

czyli

$$a^3b^2 \leq \frac{3a^5 + 2b^5}{5}. \quad (4)$$

Analogicznie otrzymujemy nierówność

$$a^2b^3 \leq \frac{2a^5 + 3b^5}{5}. \quad (5)$$

Dodanie stronami nierówności (4) i (5) daje nierówność z treści zadania.

1579. Prostopadłościan ma pole powierzchni całkowitej równe P , a jego objętość jest równa V . Udowodnij, że

$$V^2 \leq \frac{P^3}{216}.$$

Niech a, b, c będą długościami krawędzi prostopadłościanu. Wówczas po uwzględnieniu wzorów na pole powierzchni oraz objętość prostopadłościanu możemy przepisać dowodzoną nierówność w postaci

$$a^2b^2c^2 \leq \left(\frac{ab + bc + ca}{3} \right)^3. \quad (6)$$

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb ab, bc, ca prowadzi do nierówności

$$\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \leq \frac{ab + bc + ca}{3},$$

co po uproszczeniu i obustronnym podniesieniu do sześciu daje nierówność (6).

