

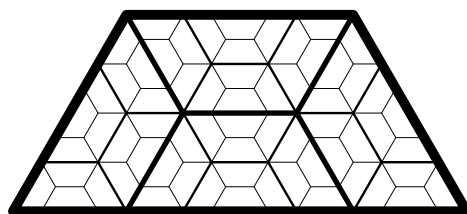
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1587**, **1588** i **1589** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1587. Zapisz liczbę 119 używając cyfr 4, 7 i 7.

1588. Zapisz liczbę 121 używając cyfr 4, 7 i 7.

1589. Zapisz liczbę 217 używając cyfr 4, 7 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 217 (21/2019)

Piątek, 24 maja 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

1590. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)^3 \cdot (n+3) \cdot (n+4) < (n+2)^5.$$

1591. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2) \cdot n^6 \cdot (n+2) < (n-1)^4 \cdot (n+1)^4.$$

1592. Rozstrzygnij, czy dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2) \cdot n^8 \cdot (n+2) < (n-1)^5 \cdot (n+1)^5.$$

1593. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

1594. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają warunek

$$a+b+c+d+e+f=6.$$

Udowodnij, że

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab < 8.$$

Rozwiązania zadań 1580–1586

1580. $25 = 7 \cdot 7 - 4! = 4! + \frac{7}{7}$

1581. $175 = 4! \cdot 7 + 7$

1582. $350 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{7^{4!}}}} + 7$

1583. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b + a^2b^3 \leq a^5 + b^5.$$

Wykażemy, że nie dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b podana nierówność jest prawdziwa. W tym celu wskażemy liczby a, b , dla których jest ona fałszywa.

Przyjmijmy $r = b - a$, czyli $b = a + r$. Wówczas dana nierówność może być sprowadzona do postaci

$$a^5 + ra^4 + a^5 + 3ra^4 + \dots \leq a^5 + a^5 + 5ra^4 + \dots, \quad (1)$$

gdzie w miejscu kropek znajdują się wyrażenia zawierające czynnik r^2 , a więc mające bardzo małą wartość bezwzględną, jeżeli r ma małą wartość bezwzględną. Nierówność (1) po uproszczeniu przybiera postać

$$\dots \leq ra^4 + \dots \quad (2)$$



Można oczekiwać, że jeśli r jest liczbą ujemną o bardzo małej wartości bezwzględnej, to składnik ra^4 po prawej stronie nierówności (2) jest ujemny i jednocześnie znacznie większy co do wartości bezwzględnej od pozostałych składników występujących po obu stronach nierówności. Wobec tego prawa strona nierówności (2) powinna być mniejsza od lewej, a sama nierówność fałszywa.

To oznacza, że przykładu powinniśmy szukać wśród takich par liczb a, b , że liczba a jest nieznacznie większa od b .

Próbując podstawiać w danej w zadaniu nierówności takie małe liczby całkowite a, b , że $a = b + 1$ trafiamy na parę liczb $a = 6$ i $b = 5$, dla której dana nierówność przybiera postać

$$10980 \leq 10901,$$

jest więc fałszywa.

Uwaga: Można udowodnić, że dana nierówność jest fałszywa dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b spełniających nierówności

$$b < a < C \cdot b,$$

gdzie C jest pewną stałą w przybliżeniu równą 1,22074.

1584. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x \leq x^5 + 4.$$

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $x^5, 1, 1, 1, 1$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt[5]{x^5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x^5 + 4}{5},$$

co po uproszczeniu i obustronnym pomnożeniu przez 5 daje nierówność z treści zadania.

1585. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x^3 \leq 3x^5 + 2.$$

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $x^5, x^5, x^5, 1, 1$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt[5]{x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{3x^5 + 2}{5},$$

co po uproszczeniu i obustronnym pomnożeniu przez 5 daje nierówność z treści zadania.

1586. Udowodnij nierówność $\sqrt[10]{2} < \frac{11}{10}$.

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do dziesięciu liczb, z których jedna jest równa 2, a pozostałe dziewięć są jedynkami, prowadzi do nierówności

$$\sqrt[10]{2} \leq \frac{2 + 9 \cdot 1}{10} = \frac{11}{10}.$$

