

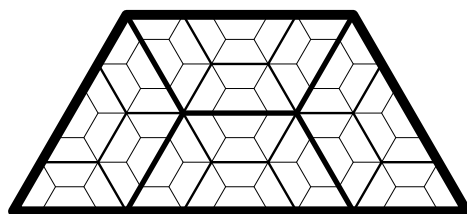
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1595**, **1596** i **1597** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1595. Zapisz liczbę 6660 używając cyfr 2, 4, 9 i 9.

1596. Zapisz liczbę 6660 używając cyfr 4, 9, 9 i 9.

1597. Zapisz liczbę 6660 używając cyfr 3, 5, 6 i 8 (każdej tylko raz).



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 218 (22/2019)

Piątek, 31 maja 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

1598. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$27 \cdot (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \leq 8 \cdot (a+b+c)^3.$$

1599. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$8abc \leq (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a).$$

Rozwiązania zadań 1587–1594

$$\mathbf{1587.} \quad 119 = 7 \cdot (4! - 7) \qquad \mathbf{1588.} \quad 121 = \sqrt{4^7} - 7 \qquad \mathbf{1589.} \quad 217 = \frac{7!}{4!} + 7 = 7 \cdot (4! + 7)$$

1590. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)^3 \cdot (n+3) \cdot (n+4) < (n+2)^5.$$

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $n+1, n+1, n+1, n+3, n+4$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt[5]{(n+1)^3 \cdot (n+3) \cdot (n+4)} < \frac{3 \cdot (n+1) + (n+3) + (n+4)}{5},$$

która po uproszczeniu i obu stronnym podniesieniu do piątej potęgi daje nierówność z treści zadania.

Powyższa nierówność jest ostra jako nierówność między średnimi liczb, które nie są wszystkie równe.

1591. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2) \cdot n^6 \cdot (n+2) < (n-1)^4 \cdot (n+1)^4.$$

Grupując odpowiednie czynniki w iloczynach przepisujemy daną w zadaniu nierówność w postaci

$$(n^2 - 4) \cdot (n^2)^3 < (n^2 - 1)^4. \quad (1)$$

Zastosowanie nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $n^2 - 4, n^2, n^2, n^2$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt[4]{(n^2 - 4) \cdot (n^2)^3} < \frac{3 \cdot n^2 + (n^2 - 4)}{4}, \quad (2)$$



która po uproszczeniu prawej strony i obustronnym podniesieniu do czwartej potęgi daje nierówność (1).

Nierówność (2) jest ostra jako nierówność między średnimi liczb, które nie są wszystkie równe.

1592. Rozstrzygnij, czy dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2) \cdot n^8 \cdot (n+2) < (n-1)^5 \cdot (n+1)^5.$$

Podana nierówność nie jest ogólnie prawdziwa, np. dla $n = 3$ przybiera postać

$$1 \cdot 3^8 \cdot 5 < 2^5 \cdot 4^5,$$

czyli

$$32805 < 32768,$$

a zatem jest fałszywa.

1593. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Stosujemy nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do następujących trzech liczb: $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$. Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{1} \leq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3},$$

co po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność z treści zadania.

1594. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Udowodnij, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab < 8.$$

Zauważmy, że

$$(a+d) \cdot (b+e) \cdot (c+f) = (abc + bcd + cde + def + efa + fab) + ace + bdf,$$

co wobec dodatniości liczb a, b, c, d, e, f prowadzi do nierówności

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab < (a+d) \cdot (b+e) \cdot (c+f). \quad (3)$$

Po zastosowaniu nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną do liczb $a+d, b+e, c+f$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{(a+d) \cdot (b+e) \cdot (c+f)} \leq \frac{(a+d) + (b+e) + (c+f)}{3} = \frac{a+b+c+d+e+f}{3} = \frac{6}{3} = 2. \quad (4)$$

Podnosząc do sześciąnu skrajne strony nierówności (4) otrzymujemy

$$(a+d) \cdot (b+e) \cdot (c+f) \leq 8. \quad (5)$$

Teza zadania wynika z nierówności (3) i (5).

