

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1600**, **1601** i **1602** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1600. Zapisz liczbę 209 używając cyfr 3, 3 i 7.

1601. Zapisz liczbę 219 używając cyfr 3, 3 i 7.

1602. Zapisz liczbę 222 używając cyfr 3, 3 i 7.

Nierówność między średnimi (AG) dla początkujących

1603. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$24abcd \leq (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

1604. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$81abcd \leq 4 \cdot (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

W każdym z kolejnych 12 zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego największą wartość wyrażenia przy a, b i ewentualnie c przebiegających liczby całkowite dodatnie oraz podaj przykład pary/trójki liczb całkowitych dodatnich a, b i ewentualnie c , dla której ta największa wartość jest osiągana.

1605. $\max \frac{ab}{a^2 + 4b^2} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

1606. $\max \frac{ab}{4a^2 + 9b^2} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

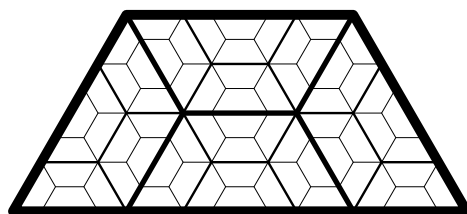
1607. $\max \frac{abc}{a^3 + b^3 + 8c^3} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

1608. $\max \frac{abc}{a^3 + 8b^3 + 27c^3} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

1609. $\max \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8c^4} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

1610. $\max \frac{abc}{8a^2 + b^4 + c^4} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

1611. $\max \frac{abc}{3a^2 + 2b^3 + 64c^6} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 219 (23/2019)

Piątek, 7 czerwca 2019 r.



$$1612. \quad \max \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6} = \dots \quad \text{dla} \quad a = \dots, \quad b = \dots, \quad c = \dots$$

$$1613. \quad \max \frac{ab^2}{4a^3 + b^3} = \dots \quad \text{dla} \quad a = \dots, \quad b = \dots$$

$$1614. \quad \max \frac{ab^3}{27a^4 + b^4} = \dots \quad \text{dla} \quad a = \dots, \quad b = \dots$$

$$1615. \quad \max \frac{a^2b^3}{a^5 + 48b^5} = \dots \quad \text{dla} \quad a = \dots, \quad b = \dots$$

$$1616. \quad \max \frac{ab}{a^3 + b^3 + 64} = \dots \quad \text{dla} \quad a = \dots, \quad b = \dots$$

Rozwiązania zadań 1595–1599

$$1595. \quad 6660 = ((\sqrt{9})!)! \cdot (9 + \sqrt{4^{-2}}) \quad 1596. \quad 6660 = 9^4 + 99 \quad 1597. \quad 6660 = \frac{8! - 3 \cdot 5!}{6}$$

1598. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$27 \cdot (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \leq 8 \cdot (a+b+c)^3.$$

Stosujemy nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną do następujących trzech liczb: $a+b, b+c, c+a$. Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)} \leq \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{3}. \quad (1)$$

Podnosząc do sześciastu skrajne strony nierówności (1) otrzymujemy

$$(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \leq \frac{8 \cdot (a+b+c)^3}{27},$$

co po obustronnym pomnożeniu przez 27 daje nierówność z treści zadania.

1599. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$8abc \leq (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a).$$

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$2\sqrt{ab} \leq a+b, \quad 2\sqrt{bc} \leq b+c, \quad 2\sqrt{ca} \leq c+a.$$

Mnożąc stronami powyższe trzy nierówności otrzymujemy nierówność z treści zadania.

