

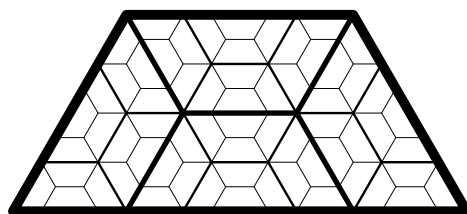
Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1617**, **1618** i **1619** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1617. Zapisz liczbę 90 używając cyfr 7, 7 i 8.

1618. Zapisz liczbę $7^5 = 16807$ używając cyfr 7, 7 i 8.

1619. Zapisz liczbę $7^6 = 117649$ używając cyfr 7, 7 i 8.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 220 (24/2019)

Piątek, 14 czerwca 2019 r.

Nierówność między średnimi (AG) – dla początkujących

W każdym z kolejnych 8 zadań podaj parę liczb rzeczywistych dodatnich x i y , dla której podane wyrażenie osiąga największą wartość.

1620. $\max \frac{xy}{x^2 + y^3 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1621. $\max \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1622. $\max \frac{xy}{x^2 + y^5 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1623. $\max \frac{xy}{x^3 + y^5 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1624. $\max \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1625. $\max \frac{x^2 y^2}{x^8 + y^8 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1626. $\max \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^5 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

1627. $\max \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^7 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

Rozwiązania zadań 1600–1616

1600. $209 = (3!)^3 - 7$

1601. $219 = 3 \cdot 73$

1602. $222 = 3! \cdot 37$

1603. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$24abcd \leq (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

Nie, np. dla $a = b = c = 2$ i $d = 1$ dana nierówność przyjmuje postać

$$24 \cdot 8 \leq 3^3 \cdot 6, \quad \text{czyli po uproszczeniu} \quad 32 \leq 27,$$

jest więc fałszywa.



1604. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$81abcd \leq 4 \cdot (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb a, b, c otrzymujemy

$$3 \cdot \sqrt[3]{abc} \leq a+b+c. \quad (1)$$

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, d$ otrzymujemy

$$3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2d}{4}} \leq a+d,$$

czyli

$$3 \cdot \sqrt[3]{a^2d} \leq \sqrt[3]{4} \cdot (a+d). \quad (2)$$

Analogicznie uzyskujemy nierówności

$$3 \cdot \sqrt[3]{b^2d} \leq \sqrt[3]{4} \cdot (b+d) \quad (3)$$

oraz

$$3 \cdot \sqrt[3]{c^2d} \leq \sqrt[3]{4} \cdot (c+d). \quad (4)$$

Mnożąc stronami nierówności (1), (2), (3) i (4), otrzymujemy nierówność z treści zadania.

$$1605. \quad \max \frac{ab}{a^2+4b^2} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad a=2, \quad b=1$$

$$1606. \quad \max \frac{ab}{4a^2+9b^2} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a=3, \quad b=2$$

$$1607. \quad \max \frac{abc}{a^3+b^3+8c^3} = \frac{1}{6} \quad \text{dla} \quad a=2, \quad b=2, \quad c=1$$

$$1608. \quad \max \frac{abc}{a^3+8b^3+27c^3} = \frac{1}{18} \quad \text{dla} \quad a=6, \quad b=3, \quad c=2$$

$$1609. \quad \max \frac{abc}{a^2+8b^4+8c^4} = \frac{1}{8} \quad \text{dla} \quad a=4, \quad b=1, \quad c=1$$

$$1610. \quad \max \frac{abc}{8a^2+b^4+c^4} = \frac{1}{8} \quad \text{dla} \quad a=2, \quad b=2, \quad c=2$$

$$1611. \quad \max \frac{abc}{3a^2+2b^3+64c^6} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a=8, \quad b=4, \quad c=1$$

$$1612. \quad \max \frac{abc}{3a^2+16b^3+c^6} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a=8, \quad b=2, \quad c=2$$

$$1613. \quad \max \frac{ab^2}{4a^3+b^3} = \frac{1}{3} \quad \text{dla} \quad a=1, \quad b=2$$

$$1614. \quad \max \frac{ab^3}{27a^4+b^4} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad a=1, \quad b=3$$

$$1615. \quad \max \frac{a^2b^3}{a^5+48b^5} = \frac{1}{20} \quad \text{dla} \quad a=2, \quad b=1$$

$$1616. \quad \max \frac{ab}{a^3+b^3+64} = \frac{1}{12} \quad \text{dla} \quad a=4, \quad b=4$$

