AUTOREFERAT

JANUSZ WYSOCZAŃSKI

Spis treści

1. Imię i nazwisko 2
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej i rozprawy habilitacyjnej lub osiągnięcia stanowiącego podstawę nadania stopnia doktora habilitowanego. 2
3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych. 2
4. Opis najważniejszych osiągnięć naukowych lub artystycznych, o których mowa w art. 227 ust. 1 pkt. 1 lit. a ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 ze zm.). 2
4.1. Średnia Banacha na grupach dyskretnych, artykuł [Wys88a] 3
4.2. Uzwarcenie Roydena liczb całkowitych, artykuł [Wys96] 4
4.3. Charakteryzacja (blokowo) radialnych mnożników Herza-Schura na produkcie wolnym grup dyskretnych, artykuł [Wys95] 6
4.4. Zwarta grupa kwantowa $U_q(2)$, artykuły [Wys04, Wys2009a] 9
4.5. t-deformacja, artykuły [BWys98, BWys01, Wys06] 12
4.6. bm-niezależność, artykuły [Wys07, Wys08, Wys10, KWys10, OWys20] 16
4.7. Relacje Q-komutacji, artykuły [BLWys12, BLWys17] 25
4.8. Perturbacje operatorów, artykuł [KWWys17] 32
5. Opis pozostałych osiągnięć naukowych lub artystycznych, niewymienionych w pkt. 4. 35
5.1. Jednostajna średniowalność, artykuł [Wys88] 35
5.2. Konstrukcja rodziny nieunitaryzowalnych jednostajnie ograniczonych reprezentacji produktów wolnych, artykuł [Wys93] 36
5.3. Algebra Hecke na drzewach jednorodnych, artykuł [Wys94] 37
5.4. Sześcienna algebra Hecke związana z grupą kwantową $U_q(2)$, artykuły [Wys10a, Wys2009a] 39
5.5. $d-$deformacja wolnej przestrzeni Focka, artykuł [Wys05a] 39
5.6. Niezależności nieprzemienne (bf-niezależność i cf-niezależność), artykuły [KWys13, SWys16] 41
5.7. Słabo monotoniczna przestrzeń Focka, artykuły [Wys05, CGWys20] 43
5.8. bm-CTG dla stożków niesymetrycznych, artykuł [OWys19] 48
5.9. Łączny promień numeryczny i spektralny dla układu skończonego operatorów, artykuł [KWys20] 50
6. Opis osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych i popularyzujących naukę lub sztukę. 52
6.1. Osiągnięcia dydaktyczne 52
6.2. Osiągnięcia organizacyjne 52
6.3. Osiągnięcia popularyzujące naukę 54
Bibliografia 54

1. Imię i nazwisko

Janusz Wysoczański

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej i rozprawy habilitacyjnej lub osiągnięcia stanowiącego podstawę nadania stopnia doktora habilitowanego.

a. **Magister matematyki**. Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego, 1984r. tytuł pracy magisterskiej: *"Charakteryzacja grup dyskretnych ze średnią Banacha i funkcje Littlewooda na grupie wolnej"*
b. **Doktor nauk matematycznych**. Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego, 27.11.1990r. tytuł pracy doktorskiej: "*Free products of representations*"
c. **Doktor habilitowany nauk matematycznych w zakresie matematyki**. Wydział Matematykii Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, 19.05.2009r., tytuł rozprawy habilitacyjnej: "*Konstrukcje modeli nieprzemiennej probabilistyki*"
d. **Profesor w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka** 16.02.2022r.

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych.

(1) 1985–1990: **asystent**, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
(2) grudzień 1993 – kwiecień 1995: Staż podoktorski w Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon (Kanada)
(3) od 1990: **adiunkt**, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
(4) od 1.03.2022: **profesor**, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

4. Opis najważniejszych osiągnięć naukowych lub artystycznych, o których mowa w art. 227 ust. 1 pkt. 1 lit. a ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 ze zm.).

Następujące osiągnięcia matematyczne uważam za moje najważniejsze:

(1) charakteryzacja grup dyskretnych ze średnią Banacha poprzez własności przestrzeni funkcji Littlewooda
(2) konstrukcja uzwarcenia Roydena liczb całkowitych
(3) charakteryzacja radialnych mnożników Herza-Schura na produkcie wolnym grup dyskretnych
(4) konstrukcja grupy kwantowej $U_q(2)$ i opis jej własności, oraz konstrukcja jej operatora Kaca-Takesaki zwanego *multiplicative unitary*
(5) wprowadzenie (razem z Markiem Bożejko) pojęcia t-deformacji miar i splotów oraz opis ich własności
(6) wprowadzenie nowego pojęcia niezależności w nieprzemiennej probabilistyce, zwanego *bm-niezależność*, udowodnienie dla niego centralnych twierdzeń granicznych związanych ze stożkami dodatnimi, konstrukcja (wraz z Anną Kulą) ruchów Browna dla bm-niezależności i znalezienie charakterystyki objętościowej (*volume characteristic*) dla symetrycznych stożków dodatnich, udowodnienie (wraz z Lahcenem Oussi) Prawa Małych Liczb dla bm-niezależnych zmiennych losowych indeksowanych elementami dodatnich stożków symetrycznych

(7) skonstruowanie (wraz z Markiem Bożejko i Eugene Lytvynovem) operatorowej realizacji uogólnionych relacji Q-komutacji, dla ciągłego jądra $Q(x,y)$, opis ich własności i wprowadzenie pojęcia $Q-$niezależności
(8) konstrukcja (wraz z Anną Kulą i Michałem Wojtylakiem) perturbacji operatorowych rzędu 2 (*rank 2-perturbations*), opis ich własności, w szczególności konstrukcja operatorowej wersji t-transformaty i jej uogólnień, opis własności tych uogólnień

4.1. **Średnia Banacha na grupach dyskretnych, artykuł** [Wys88a]**.** W artykule [8] Nicolas Theodore Varopoulos wprowadził pojęcie *tensorów Littlewooda* jako istotnego narzędzia do badania uogólnienia nierówności von Neumanna dla trzech komutujących kontrakcji. W artykułach [5, 6] Marek Bożejko badał przestrzenie *funkcji Littlewooda* $T_2(G)$ i $T_1(G)$ na grupie dyskretnej G, które są tensorami Littlewooda niezmienniczymi na działanie grupy. W pracy [Wys88a] rozważałem ogólną definicję przestrzeni Littlewooda $T_p(G)$ dla $1 \le p < \infty$. Mianowicie, funkcj $f : G \mapsto \mathbb{C}$ jest w przestrzeni $T_p(G)$ jeśli może być przedstawiona jako suma $f(x^{-1}y) = a_1(x,y) + a_2(x,y)$ dwóch jąder na $G \times G$, które spełniają warunki

(1) $a_1(x,y)a_2(x,y) = 0$ dla wszystkich $x, y \in G$
(2) istnieje taka stała $C > 0$, że

$$\sup_{x\in G}\left(\sum_{y\in G}|a_1(x,y)|^p\right)^{1/p} \le C \quad \text{and} \quad \sup_{y\in G}\left(\sum_{x\in G}|a_2(x,y)|^p\right)^{1/p} \le C.$$

Kres dolny takich stałych $C > 0$ jest normą Banacha na przestrzeni $T_p(G)$, oznaczaną $|f|_{t_p}$. Inną, równoważną, normą na $T_p(G)$ jest

$$\|f\|_{t_p} := \sup_{A_1,A_2}\left[\frac{1}{M_{12}}\sum_{x\in A_1}\sum_{y\in A_2}|f(x^{-1}y)|^p\right]^{1/p},$$

gdzie kres górny jest po wszystkich skończonych podzbiorach $A_1, A_2 \subset G$, a $M_{12} := \max\{|A_1|, |A_2|\}$. Równoważność tych dwóch norm jest dana jako nierówności

$$|f|_{t_p} \le \|f\|_{t_p} \le 2^{1/p}|f|_{t_p}.$$

Średniowalność (t.j. istnienie średniej Banacha, ang. *amenability*) na grupie dyskretnej G jest scharakteryzowana przez warunek Følnera: dla każdego $s > 0$ i dla każdego skończonego podzbioru $A \subset G$ istnieje skończony podzbiór $F \subset G$, dla którego spełniona jest następująca nierówność:

$$|AF| \le (1+s)|F|.$$

Inną charakteryzację średniowalności jest warunek Hulanickiego: dla dowolnej dodatniej funkcji $f \in \ell^1(G)$ norma $\|f\|_1 := \sum_{x\in G}|f(x)|$ jest równoważna z normą splotową $\|f\|_{VN} := \sup\{\|f * g\|_2 : \ g \in \ell^2(G)\}$. W artykule [Wys88a], wykorzystując te charakteryzacje średniowalności, udowodniłem następującą charakteryzację średniowalności grup dyskretnych.

Twierdzenie. [Wys88a, Theorem 1] *Grupa dyskretna G ma średnią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $T_p(G) = \ell^p(G)$ dla każdego (równoważnie: dla pewnego) $p \ge 1$.*

Następnie rozważałem funkcje Littlewooda na grupie wolnej $\mathbb{F}_N$, $N \ge 2$, która jest daleka od średniowalności. Badałem radialne funkcje Littlewooda, przy czy radialność jest względem standardowej funkcji długości $|\cdot| : \mathbb{F}_N \mapsto \mathbb{N}$, związanej z wolnymi generatorami. Rozważałem szczególne funkcje radialne χ_n, określone dla $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ wzorem

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| = n \\ 0, & |x| \ne n, \quad \text{dla} \quad x \in G. \end{cases}$$

Podałem oszacownanie na normy tych funkcji, w przestrzeni $T_p(\mathbb{F}_N)$, poprzez ich normy w $\ell^2(\mathbb{F}_N)$

Proposition. [Wys88a, Proposition 1] *Norma funkcji χ_n w przestrzeni $T_p(\mathbb{F}_N)$ jest równoważna z następującą normą ℓ^2*

$$(2N)^{-1/p}\|\chi_n\|_2 \leq \|\chi_n\|_{t_p} \leq 3^{1/p}\|\chi_n\|_2.$$

Z tego wynika równoważność norm dla skończonych kombinacji liniowych funkcji χ_n, czyli funkcji radialnych o nośnikach skończonych $f = \sum_{n=0}^{k} a_n\chi_n$ ([Wys88a], Proposition 2)

$$\|\sum_{n=0}^{k} a_n\chi_n\|_{t_p} \quad \approx \quad \left(\sum_{n=0}^{k} |a_n|^p\|\chi_n\|_2\right)^{1/p}.$$

Stąd bezpośrednio wynika, że przestrzeń $T_p^{rad}(G) \subset T_p(G)$ *radialnych funkcji Littlewooda* jest izomorficzna z wagową przestrzenią $\ell^p(\nu)$, z wagą

$$\nu := \sum_{n=0}^{\infty} \|\chi_n\|_2\delta_n,$$

gdzie δ_n jest miarą punktową Diraca w $n \in \mathbb{N}$. Pokazałem także, że odwzorowanie liniowe $\mathcal{M} : T_p(G) \subset T_p^{rad}(G)$, określone jako uśrednianie po słowach o tej samej długości

$$\mathcal{M}(f)(x) := \frac{1}{\|\chi_n\|_1} \sum_{|y|=n} f(y), \quad \text{if} \quad |x| = n,$$

jest ograniczone jest ograniczone dla każdego $p \in [1, \infty)$ (w szczególności jest rzutem ortogonalnym dla $p = 2$).

Rezultaty tych moich badań przyciągnęły uwagę innych matematyków, takich jak Gilles Pisier [9, 11] czy Jean Renault [12]. Niedawno, Nicolas Monod i Andreas Thom, razem z Marią Gerasimovą and Dominikiem Gruberem, w pracy [13], wykorzystali moje wyniki do badania problemu Dixmiera unitaryzowalności reprezentacji jednostajnie ograniczonych. Ich gółównym narzędziem jest *wykładnik Littlewooda*

$$Lit(G) := \inf\{p \in [0, \infty] : \ T_1(G) \subset \ell^p(G)\}$$

Z mojej pracy wynika, że dla grup ze średnią jest $Lit(G) \leq 1$ (a dla grup nieskończonych $Lit(G) = 1$). Pokazali oni także, że dla grupy dyskretnej G, która nie ma średniej Banacha, zawsze istnieje $p > 1$ dla którego $T_p(G) \not\subset \ell^p(G)$.

4.2. **Uzwarcenie Roydena liczb całkowitych, artykuł** [Wys96]**.** W artykule [39] Halsey Royden wprowadził nowe pojęcie uzwarcenia powierzchni Riemanna, nazwane później *uzwarceniem Roydena*, jako przestrzeń Gelfanda przemiennej algebry funkcji ograniczonych, które mają ograniczoną całkę Dirichleta. Analogiczna teoria była rozwinięta dla grafów (i, ogólniej, sieci elektrycznych) przez Maretsugu Yamasaki [40] i Paolo Mao Soardi [41]. Jednakże ni było jawnie opisanych przykładów takiego uzwarcenia. W pracy [Wys96] badałem uzwarcenie Roydena dla przypadku dyskretnego zbioru $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, który rozważałem jako drzewo jednorodne stopnia 2. Mooim celem było opisanie w sposób jawny uzwarcenia Roydena takiego grafu.

Algebra Roydena $BD(\mathbb{Z})$ składa się z funkcji $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, dla których

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \sup\{|f(n)| : \ n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{jest skończona}, \\ D(f) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n+1) - f(n)|^2 \quad \text{suma Dirichleta jest skończona}. \end{aligned}$$

Na tej algebrze określona jest norma

$$\|f\| := \|f\|_\infty + D(f)^{\frac{1}{2}}$$

z którą $BD(\mathbb{Z})$ jest przemienną algebrą Banacha z jedynką, z punktowym dodawaniem i mnożeniem. Zwarta *przestrzeń Gelfanda* tej algebry, oznaczana jest $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{Z})$ i nazywana *uzwarceniem Roydena* grafu $\mathbb{Z}$, jest przestrzenią wszystkich liniowych zespolonych funkcjonałów multyplikatywnych $\varphi : BD(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{C}$, zwanych *charakterami*, unormowanymi na funkcji I stale równej 1 (t.j. jedynce algebry) przez $\varphi(I) = 1$. Odwzorowanie $\varphi_n(f) = f(n)$ (wartość w punkcie) określa charaktery $\varphi_n \in \mathcal{R}$, przez co $\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$ jako podzbiór otwarty i gęsty.

Każda funkcja $f \in BD(\mathbb{Z})$ rozszerza się do funkcji ciągłej na $\mathcal{R}$ wzorem $f(\varphi) := \varphi(f)$. Okazuje się ([Wys96], Proposition 3.2), że wartości charakterów są rzeczywiste $\mathcal{R} \ni \varphi : BD(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{R}$. Charaktery nietrywialne (różne od wszystkich φ_n) znikają na funkcjach o nośniku skończonym i że można się ograniczyć do badania uzwarcenia podzbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, zamiast $\mathbb{Z}$.

Ponieważ $BD(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$, każdy charakter na algebrze $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ jest charakterem na $BD(\mathbb{Z})$. Przestrzeń Gelfanda $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ jest uzwarceniem Čecha-Stone'a $\beta\mathbb{Z}$, zatem problem wyznaczenia uzwarcenia Roydena sprowadza się do znalezienia jaką różnicę robi warunek skończoności sumy Dirichleta.

W moich rozważaniach przydatnym nietrywialnym przykładem funkcji w $BD(\mathbb{Z})$ okazała się następująca konstrukcja. Dla $J_0 := \{4^{|k|} : k \in \mathbb{Z}\}$ i $J_1 := \{2 \cdot 4^{|k|} : k \in \mathbb{Z}\}$ określamy

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad |n| \in J_0 \\ 1 & \text{jeśli} \quad |n| \in J_1 \\ & \text{liniowo pomiędzy} \end{cases}$$

Uogólnieniem tego przykładu jest *proces linearyzacji* [Wys96, Section 2], który okazał się głównym narzędziem do badania uzwarcenia $\mathcal{R}$. Ten proces może być rozważany zarówno dla $\mathbb{Z}$ jak i dla $\mathbb{N}$. Mianowicie, dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ liczb rzeczywistych i dla ściśle rosnącego ciągu $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ liczb naturalnych określamy funkcję

$$f(k) := \begin{cases} a_n & \text{jeśli} \quad k = r_n, \\ \text{liniowo} & \text{pomiędzy wszystkimi} \quad r_n. \end{cases}$$

Wówczas jeśli

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{r_{n+1} - r_n} < +\infty,$$

to $f \in BD(\mathbb{Z})$.

W [Wys96, Proposition 3.8] pokazałem, że dla $f \in BD(\mathbb{N})$ zbiór punktów skupienia ciągu $(f(n))_{n\geq 0}$ jest domkniętym przedziałem $[\liminf f, \ \limsup f]$. To pokazuje jaką różnicę daje warunek Dirichleta, w porównaniu z algebrą $\ell^\infty(\mathbb{N})$, dla której dowolny zbiór ograniczony $\subset \mathbb{R}$ może być zbiorem punktów skupienia dla $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, a więc także wartością charakteru (czyli ultrafiltru) z $\beta\mathbb{N}$. W Definicji 5.1 wprowadziłem relację równoważności na ultrafiltrach, w zależności od tego czy zgadzają się na $BD(\mathbb{Z})$, a w Theorem 5.3 podałem bezpośredni dowód homeomorfizmy uzwarcenia Roydena $\mathcal{R}$ i przestrzeni ilorazowej.

W [Wys96, Section 6] podałem jawny opis uzwarcenia Roydena $\mathcal{R}$. Najpierw pokazałem które elementy $\beta\mathbb{Z}$ *nie są* równoważne. W tym celu wprowadziłem pojęcie *przedstawienia rozłącznego* pary zbiorów nieskończonych $A, B \subset \mathbb{N}$. Jest to jednoznaczne przedstawienie w postaci sum nieskończonych

$$
\begin{aligned}
A &= \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j, \quad B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j, \\
\min A_j &\leq \max A_j < \min B_j \leq \max B_j \quad j = 1, 2, \ldots \\
k_j &:= \min B_j - \max A_j, \quad k'_j = \min A_{j+1} - \max B_j, \quad j = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie. [Wys96, Theorem 6.1] *Dwa ultrafiltry $\Omega, \Omega' \in \beta\mathbb{Z}$ **nie są równoważne** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa nieskończone podzbiory $A \in \Omega$ i $B \in \Omega'$, których rozłączne przedstawienie pary (A, B) spełnia warunek*

$$
\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{k_j} < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{k'_j} < +\infty
$$

W [Wys96, Proposition 6.3] pokazałem, że moc uzwarcenia Roydena $\mathcal{R}$ jest taka sama jak moc uzwarcenia Čecha-Stone'a $\beta\mathbb{Z}$. Opis bazy otoczeń topologii na $\mathcal{R}$ został podany w Theorem 6.4.

Oczywiście Theorem 6.1 daje także opis równoważnego warunku na równoważność dwóch ultrafiltrów. Jednakże, chcąc opisać dokładniej klasy równoważności ultrafiltrów, znalazłem tylko następujący warunek.

Proposition. [Wys96, Proposition 6.2] *Niech $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ będzie bijekcją, $\Omega \in \beta\mathbb{N}$ niech będzie ultrafiltrem i niech $\phi(\Omega) := \{\phi(A) : \ A \in \Omega\}$. Wówczas $\phi(\Omega) \in \beta\mathbb{N}$ jest także ultrafiltrem i warunek*

$$
\sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi(n) - n| < +\infty
$$

pociąga za sobą równoważność ultrafiltrów Ω i $\phi(\Omega)$, które, w konsekwencji, określają ten sam element uzwarcenia Roydena $\mathcal{R}$

Moja konstrukcja była jedynym jawnym przykładem uzwarcena Roydena co najmniej do roku 2014 (jak podano w artykule [42])

4.3. **Charakteryzacja (blokowo) radialnych mnożników Herza-Schura na produkcie wolnym grup dyskretnych, artykuł** [Wys95]**.** Funkcję $\psi : G \mapsto G$ na grupie dyskretnej G nazywamy **mnożnikiem Herza-Schura** jeśli operator mnożenia M_ψ zachowuje algebrę $B(\ell^2(G))$ operatorów ograniczonych na $\ell^2(G)$: $M_\psi : B(\ell^2(G)) \mapsto B(\ell^2(G))$. Operator mnożenia M_ψ jest określony w następujący sposób. Jeśli $\{\delta_x \in \ell^2(G) : x \in G\}$ jest standardową bazą ortonormalną i $L \in B(\ell^2(G))$ jest operatorem ograniczonym, to dla macierzy $L(x, y) := \langle L\delta_y, \delta_x \rangle$ określamy

$$
M_\psi(L)(x, y) := \psi(y^{-1}x)L(x, y)
$$

Przestrzeń mnożników Herza-Schura na grupie dyskretnej G oznaczamy $B_2(G)$. Jest ona algebrą z mnożeniem punktowym $M_{\psi_1}M_{\psi_2} = M_{\psi_1 \cdot \psi_2}$. Z definicji, normą mnożnikową jest norma operatora mnożenia $\|\psi\|_{B_2} = \|M_\psi\|_{B(\ell^2(G)) \to B(\ell^2(G))}$. W artykule [21] Marek Bożejko i Gero Fendler pokazali, że $B_2(G)$ jest izometrycznie izomorficzna z algebrą *mnożników całkowicie ograniczonych* na algebrze Fouriera $A(G)$.

The space of all Herz-Schur multipliers on G is denoted by $B_2(G)$. By definition, the multiplier norm is the norm of the multiplication operator $\|\psi\|_{B_2} = \|M_\psi\|_{B(\ell^2(G)) \to B(\ell^2(G))}$. Marek Bożejko with Gero Fendler have shown in [21] that Herz-Schur multipliers on G are isometrically isomorphic to *completely bounded multipliers* of the Fourier algebra $A(G)$.

W 1987r Uffe Haagerup i Ryszard Szwarc pokazali charakteryzację radialnych mnożników Herza-Schura na grupie wolnej $\mathbb{F}_N$ (o $N \geq 2$ wolnych generatorach), podając jawny wzór na normę mnożnikową. Jednakże dopiero w 2010r. ukazał się ich wspólny artykuł z Troelsem Steenstrupem [14].

Moja praca [Wys95] dotyczyła mnożników Herza-Schura na produkcie wolnym grup dyskretnych.

Jeśli $\{G_j : j \in J\}$ jest rodziną gruo dyskretnych, indeksowaną przeliczalnym zbiorem J, to ich *iloczyn wolny*, oznaczany

$$G := \underset{j \in J}{*} G_j,$$

jest grupą, w której

(1) element neutralny $e \in G$ jest utożsamieniem elementów wszystkich neutralnych $e_j \in G_j$,
(2) każdy inny element $x \in G \setminus \{e\}$ jest jednoznacznej postaci

$$x = g_1 \dots g_m, \quad g_r \in G_{j_r} \setminus \{e_{j_r}\} \quad j_1 \neq \dots \neq j_m, \quad 1 \leq r \leq m.$$

Dla elementów G określamy **długość blokową**: $\|e\| = 0$ oraz $\|x\| = m$ dla $x = g_1 \dots g_m \in G \setminus \{e\}$. Pozwala to zdefiniować funkcje *blokowo radialne* na produkcie wolnym G: funkcja $f : G \mapsto \mathbb{C}$ jest blokowo radialna jeśli $f(x) = f(y)$ dla wszystkich takich $x, y \in G$ dla których $\|x\| = \|y\|$.Równoważnie, funkcja blokowo radiwalna jest określona przez ciąg $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ liczb zespolonych: $f(x) := \varphi(\|x\|)$ dla $x \in G$.

Grupa wolna $\mathbb{F}_N$ o $N \geq 2$ wolnych generatorach jest iloczynem wolnym N kopii grupy addytywnej $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, jednakże *naturalna długość* $|x|$ na $\mathbb{F}_N$ (względem wolnych generatorów) jest zupełnie inna niż długość blokowa (np. jeśli s jest wolnym generatorem, to $|s^m| = m$, natomiast $\|s^m\| = 1$ dla $m \in \mathbb{N}$).

Ważną cechą grupy wolnej jest to, że działa ona na drzewie jednorodnym. W moich badaniach iloczynów wolnych korzystałem z ich działania na drzewie dwu-jednorodnym (tzw. *bi-partite trees*), zdefiniowanym p[rzez Jean-Pierre Serre'a w książce [16]. Takie drzewo $T(G)$ składa się ze

(1) zbioru wierzchołków $V = V_0 \cup V_1$, które sądwóch rodzajów: $V_0 := G$ jest zbiorem elementów produktu wolnego, a $V_1 := \{gG_j : g \in G, j \in J\}$ składa się z warstw wszystkich elementów.
(2) zbioru (niezorientowanych) krawędzi $E(G) := \{(g, gG_j), (gG_j, g) : g \in G, j \in J\}$, które łączą każdy element $g \in G$ ze wszytstkimi jego warstwami.

Na drzewie $T(G)$ jest naturalna odległość $d(v_1, v_2)$ pomiędzy dowolnymi wierzchołkami $v_1, v_2 \in V$, określona jako najkrótsza droga (czyli geodezyjna) która je łączy.

W moich badaniach ograniczyłem się do przypadku iloczynu wolnego $N \geq 2$ grup o tej samej liczbie elementów $2 \leq k = |G_j| \leq \infty$ dla wszystkich $1 \leq j \leq N$. Wówczas drzewo $T(G)$ jest dwu-jednorodne: wierzchołki z V_0 mają stopień N (czyli ilość sąsiednich wierzchołków jest N), natomiast wierzchołki z V_1 mają stopień k.

Iloczyn wolny G działa na drzewie $T(G)$ poprzez lewe translacje $L : V \mapsto V$, $L(g)h := gh$ oraz $L(g)hG_j := ghG_j$, które zachowują oba rodzaje wierzchołków. Jest to działanie izometryczne: $d(gv_1, gv_2) = d(v_1, v_2)$ dla wszystkich $g \in G$ i $v_1, v_2 \in V$.

Istotną cechą tej konstrukcji jest to, że łączy długość blokową z odległością na drzewie: $d(g, h) = 2\|g^{-1}h\|$. Ponadto, są dwa szczególne rodzaje operatorów translacji ("pochodnych") na $T(G)$, z kórych każdy okazał się istotny w moich badaniach produktów wolnych: przesunięcie w kierunku wierzchołka $e \in V_0$ (w konstrukcji jednostajnie reprezentacji nieunitaryzowalnych) oraz przesunięcie w kierunku "punktu w nieskończoności" (do charakteryzacji blokowo radialnych mnożników Herza-Schura).

Mój artykuł [Wys95] jest poświęcony badaniu blokowo radialnych mnożników Herza-Schura na produkcie wolnym $G := \underset{j\in J}{*} G_j$. W tym celu skonstruowałem specjalny operator $T : V \mapsto V$, działający na wierzchołkach drzewa $T(G)$, który jest stowarzysony z nieskończoną ścieżką $\omega = (v_n)_{n\geq 0}$, startującą z $v_0 = e$, w której $d(v_n, v_0) = n$ i $d(v_n, v_{n+1}) = 1$. Wówczas określamy $Tv_n = v_{n+1}$, natomiast dla $v \notin \omega$ Tv jest określony za pomocą warunków $d(Tv, v_n) = d(v, v_n)-1$ dla wszystkich $n \geq 0$. Okazuje się, że dla skończonych $k, N < \infty$ operator T jest ograniczony na $\ell^2(V)$ i że zarówno dla T^2 jak i dla T^*T podprzestrzenie $\ell^2(V_0), \ell^2(V_1) \subset \ell^2(V)$ są niezmiennicze. Tą samą własność mają operatory U^2 i U^*U, gdzie U jest ko-izometrią na $\ell^2(V)$ zadaną wzorem

$$U := \frac{1}{\sqrt{k-1}} T \restriction_{\ell^2(V_0)} + \frac{1}{\sqrt{N-1}} T \restriction_{\ell^2(V_1)} .$$

Zbadałem C^*-algebrę $C^*(U^2, U^*U)$, która okazała się być izomorficzna z $C^*(S^2, S^*S)$, dla operatora $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $S(\delta_n) = \delta_{n-1}$, który jest sprzężony dl standardowego izometrycznego *przesunięcia* $S^*(\delta_n) = \delta_{n+1}$. Pozwoliło to na uzyskanie następującej charakteryzacji blokowo radialnych mnożników Herza-Schura na produktach wolnych skończonych grup dyskretnych tej samej mocy $3 \leq k < \infty$ dla $3 \leq N < \infty$.

Twierdzenie. [Wys95, Theorem 6.1] *Niech $f : G \mapsto \mathbb{C}$ będzie funkcją blokowo radialną na iloczynie wolnym $G := \underset{j\in J}{*} G_j$ i niech $f(x) = \varphi(\|x\|)$ dla $x \in G$. Załóżmy ponadto, że $3 \leq N, k$. Wówczas f jest mnożnikiem Herza-Schura $f \in B_2(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator Hankela $\mathbf{h}$ na ℓ^2, zadany macierzą Hankela $h_{i,j} := \varphi(i + j) - \varphi(i + j + 1)$ dla $i, j \geq 0$, jest śladowy. Wtedy istnieje granica $d := \lim_{n\to\infty} \varphi(m)$ oraz dwa operatory śladowe $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ na ℓ^2, takie, że*

1. *dla $3 \leq k < \infty$ norma mnożnikowa jest równa $\|f\|_{B_2} = |d| + \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1$, gdzie $\|\cdot\|_1$ oznacza normę śladową, natomiast operatory śladowe $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są jednoznacznymi rozwiązaniami układu równań*

$$\begin{cases} \mathbf{h} &= \frac{k-1}{k-2}\mathbf{a} - \frac{1}{N-2} S^*\mathbf{b}S \\ S\mathbf{h} &= \frac{N-1}{N-2}\mathbf{b} - \frac{1}{k-2}\mathbf{a}. \end{cases}$$

2. *dla $k = \infty$ norma mnożnikowa jest równa*

$$\|f\|_{B_2} = |d| + \|\mathbf{h} + \frac{1}{N-2} S^*S\mathbf{h}S\|_1 + \frac{N-2}{N-1}\|S\mathbf{h}\|_1$$

   natomiast operatory śladowe $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są (jednoznacznymi) rozwiązaniami układu równań

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{N-2}{N-1} S\mathbf{h} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{h} + \frac{1}{N-1} S^*S\mathbf{h}S. \end{aligned}$$

W przypadku $k = 2$ mamy do czynienia z produktem wolnym $N \geq 3$ kopii dwuelementowej grupy cyklicznej $G_j = \mathbb{Z}_2$ i wówczas otrzymujemy nastepującą charakteryzację.

Twierdzenie. [Wys95, Theorem 7.1] *Blokowo radialna funkcja $f : G = *_{j=1}^N \mathbb{Z}_2 \mapsto \mathbb{C}$, określona ciągiem $f(x) = \varphi(\|x\|)$ dla $x \in G$, jest mnożnikiem Herza-Schura $f \in B_2(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator Hankela $\mathbf{h}$ na ℓ^2, zadany macierzą Hankela $h_{i,j} := \varphi(i+j) - \varphi(i+j+2)$ dla $i, j \geq 0$, jest śladowy. Wówczas istnieją stałe c, d takie, że $f(x) = c + d(-1)^{\|x\|} + F(x)$, dla pewnej funkcji blokowo radialnej F, która znika w nieskończoności. Ponadto, norma mnożnikowa jest* *dana wzorem*

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_2} &= |c| + |d| + \frac{N-2}{N-1}\left\|\left(I - \frac{\tau}{N-1}\right)^{-1}\mathbf{h}\right\|_1, \quad N < \infty\\ \|f\|_{B_2} &= |c| + |d| + \|\mathbf{h}\|_1, \quad N = \infty,\end{aligned}$$

przy czym, z definicji, $\tau(a) := S^*aS$ *dla dowolnego operatora* a *ograniczonego na* ℓ^2.

Dla $N = 2$ i $k \geq 3$ otrzymałem charakteryzację blokowo radialnych mnożników Herza-Schura w następującej postaci.

Twierdzenie. [Wys95, Theorem 7.4] *Blokowo radialna funkcja* $f : G = G_1 * G_2 \mapsto \mathbb{C}$, *określona ciągiem* $f(x) = \varphi(\|x\|)$ *dla* $x \in G$, *jest mnożnikiem Herza-Schura wtedy i tylko wtedy, gdy operator Hankela* $\mathbf{h}$ *określony macierzą Hankela*

$$h_{i,j} := \begin{cases}\varphi(i+j) - \varphi(i+j+1), & \textit{if} \quad i \cdot j = 0,\\ \varphi(i+j-1) - \varphi(i+j+1), & \textit{if} \quad i,j \geq 1,\end{cases}$$

jest śladowy. Wówczas istnieje granica $d := \lim_{n\to\infty} \varphi(n)$ *i norma mnożnikowa jest dana wzorem*

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_2} &= |d| + \frac{k-2}{k-1}\left\|\left(I - \frac{\tau}{k-1}\right)^{-1}\mathbf{h}\right\|_1, \quad k < \infty\\ \|f\|_{B_2} &= |d| + \|\mathbf{h}\|_1, \quad k = \infty.\end{aligned}$$

W końcowej części pracy [Wys95] znalazłem normy mnożnikowe rodziny funkcji blokowo radialnych na iloczynie wolnym, indeksowanych zespolonym dyskiem jednostkowym $D := \{|z| \leq 1\}$, odkrytej przez Wojciecha Młotkowskiego [17], określonej wzorem

$$\varphi_z(n) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 0\\ \frac{(N-1)z+1}{Nz} z^n & \text{if} \quad n \geq 1.\end{cases}$$

Rezultaty moich badań [Wys95] były wykorzystywane przez innych autorów. W szczególności Eric Ricard i Quanhua Xu [20] użyli ich do pokazania oszacowania liniowego norm pewnych naturalnych projektorów w zredukowanych iloczynach wolnych C^*-algebr grupowych. Uffe Haagerup i Sören Möller [15] uogólnili moje wyniki na iloczyny wolne C^*-algebr. Eric Ricard i Ana-Maria Stan [18] wykorzystali je do wyliczenia norm mnożnikowych funkcji charakterystycznych zbiorów Leinerta. Tao Mei i Mikael de la Salle [19] uogólnili wyniki z prac [Wys95, 14] na grupy hiperboliczne.

4.4. **Zwarta grupa kwantowa $U_q(2)$, artykuły** [Wys04, Wys2009a]**.** W artykule [23] Stanisław Lech Woronowicz udowodnił, między innymi, że jeśli jest dany niezdegenerowany układ liczb zespolonych $E := \{E_{k_1,\ldots,k_N} : 1 \leq k_1, \ldots, k_N \leq N,\ k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}\}$, wówczas układ elementów $\{u_{jk} : 1 \leq j, k \leq N\}$, spełniających dwa warunki:

(1) unitarności:

$$\sum_{r=1}^{N} u_{jr}^* u_{rk} = \sum_{r=1}^{N} u_{jr} u_{rk}^* = \delta_{jk} I, \quad \text{for all} \quad 1 \leq j, k \leq N;$$

(2) skręconego wyznacznika:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_N=1}^{N} u_{j_1k_1} \ldots u_{j_Nk_N} E_{k_1,\ldots,k_N} = E_{j_1,\ldots,j_N} I, \quad \text{for all} \quad 1 \leq j_1, \ldots, j_N \leq N$$

definiuje zwartą grupę kwantową. Woronowicz podał jako przykład, że dla każdego $N \geq 2$ oraz $q \in (-1,1)$, grupa kwantowa $SU_q(N)$ może być otrzymana dzięki powyższej konstrukcji dla układu E zdefiniowanego przy pomocy funkcji $i : S_N \mapsto \mathbb{N}$, określonej na grupie permutacji S_N, która liczy ilość inwersji dla permutacji $\sigma \in S_N$: $i(\sigma) := |\{(i,j) : i < j \text{ and } k_i = \sigma(i) > \sigma(j) = k_j,\ i,j = 1,\ldots,N\}|$. Wówczas definiuje się E wzorami

$$\begin{aligned} E_{k_1,\ldots,k_N} &:= (-q)^{i(\sigma)}, \quad \sigma(j) = k_j, \quad j = 1,\ldots,N \\ E_{k_1,\ldots,k_N} &:= 0, \quad \text{if} \quad \{k_1,\ldots,k_N\} \neq \{1,\ldots,N\}. \end{aligned}$$

W pracy [Wys04] pokazałem analogiczną konstrukcję dla $N = 3$, w której układ E jest zdefiniowany dla $q \in (-1,1)$ przy pomocy fukncji $c(\sigma)$, która liczy ilość cykli w permutacjach $\sigma \in S_3$:

$$\begin{aligned} E_{k_1,k_2,k_3} &:= (-q)^{3-c(\sigma)}, \quad \text{if} \quad \sigma(j) = k_j,\ j = 1,2,3; \\ E_{k_1,k_2,k_3} &:= 0, \quad \text{if} \quad \{k_1,k_2,k_3\} \neq \{1,2,3\}. \end{aligned}$$

Jawna definicja jest następująca: $E_{1,2,3} = 1$, $E_{1,3,2} = E_{2,1,3} = E_{3,2,1} = -q$, $E_{2,3,1} = E_{3,1,2} = q^2$ oraz $E_{i,j,k} = 0$ jeśli $\{i,j,k\} \neq \{1,2,3\}$. Ten układ jest niezdegenerowany. Z warunków unitarności i skręconego wyznacznika wynika, że koreprezentacja fundamentalna $u := (u_{jk})_{j,k=1}^3$ ma macierz postaci:

$$u = \begin{pmatrix} a & 0 & -qv^*c^* \\ 0 & v & 0 \\ c & 0 & v^*a^* \end{pmatrix},$$

gdzie $v := u_{22}$ jest unitarny i komutuje z $a := u_{11}$ i $c := u_{31}$, c jest normalny ($cc^* = c^*c$) i $q-$komutuje z a czyli $ac = qca$. Ponadto mamy relacje $aa^* + q^2cc^* = I = a^*a + c^*c$. Wówczas jeśli $\mathcal{A}$ oznacza C^*-algebrę generowaną przez elementy a, c, v, to $(\mathcal{A}, u)$ jest zwartą grupą kwantową. Komnożenie Φ i koodwrotność κ są zadane odpowiednio wzorami [Wys04, formluas (2.7), (2.8)]. W rezultacie otrzymujemy grupę kwantową $U_q(2)$.

W [Wys04, Section 3] skonstruowałem nieprzywiedlne $*$-reprezentacje C^*-algebry $\mathcal{A}$ (w szczególności jej generatorów a, c, v) jako operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta. Opisuje to następujące twierdzenie.

Twierdzenie. [Wys04, Theorem 3.1] *Nieprzywiedlne $*$-reprezentacje C^*-algebry $\mathcal{A}$ tworzą dwie serie:*

a. seria jednowymiarowych reprezentacji (charakterów) $\pi_{\alpha,\lambda}$, parametryzowanych wszystkimi parami $(\alpha,\lambda) \in S^1 \times S^1$, gdzie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jest zespolonym okręgiem jednostkowym, danych wzorami

$$\pi_{\alpha,\lambda}(a) = \alpha I, \quad \pi_{\alpha,\lambda}(v) = \lambda I, \quad \pi_{\alpha,\lambda}(c) = 0.$$

Ta seria jest związana z trywialnością jądra $\dim(\ker \pi_{\alpha,\lambda}(c)) = 0$ operatora $\pi_{\alpha,\lambda}(c)$.

b. seria nieskończenie wymiarowych reprezentacji $\pi_{\alpha,\lambda}$, parametryzowanych wszystkimi parami $(\alpha,\lambda) \in S^1 \times S^1$, działających na ℓ^2, i danych wzorami na standardowej bazie ortonormalnej $\{\delta_n : n \geq 0\} \subset \ell^2$:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha,\lambda}(a)\delta_n &= \sqrt{1-q^{2n}}\delta_{n-1}, \\ \pi_{\alpha,\lambda}(c)\delta_n &= \alpha q^n \delta_n, \\ \pi_{\alpha,\lambda}(v)\delta_n &= \lambda\delta_n. \end{aligned}$$

Ta seria odpowiada warunkowi $\dim(\ker \pi_{\alpha,\lambda}(c)) \geq 1$.

Pokazałem, że C^*-algebra $\mathcal{A} = C^*(U_q(2))$ ma strukturę iloczynu tensorowego

$$C^*(U_q(2)) = C^*(SU_q(2)) \otimes C(U(1)),$$

w którym $C(U(1))$ jest przemienną C^*-algebrą funkcji ciągłych na grupie $U(1)$.

Moja konstrukcja pozwoliła odkryć dodatkową strukturę grupy kwantowej $U_q(2)$, opisaną w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie ([Wys04], Theorem 4.1). *Grupa kwantowa $U_q(2)$ jest produktem skręconym swoich podgrup kwantowych $\mathcal{A}_1 = C^*(SU_q(2))$ i $\mathcal{A}_2 = C(U(1))$*

$$U_q(2) = SU_q(2) \ltimes_\sigma U(1),$$

gdzie skręcenie $\sigma : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mapsto \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_1$ jest dane wzorami $\sigma(1 \otimes v) = v \otimes 1$, $\sigma(a \otimes v^k) = v^k \otimes a$, $\sigma(c \otimes v^k) = v^{k-1} \otimes c$ dla $k \in \mathbb{Z}$, przy czym $v^{-k} := (v^*)^k$ dla $k \in \mathbb{N}$, $v^0 = 1$.

W twierdzeniu [Wys04, Theorem 5.1] opsałem serię koreprezentacji unitarnych grupy kwantowej $U_q(2)$, parametryzowanych parami $(s,p) \in S \times \mathbb{Z}$, gdzie $S := \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots\}$.

Twierdzenie ([Wys04], Theorem 5.1). *Jeśli d^s jest $(2s+1)$-wymiarową koreprezentacją grupy kwantowej $SU_q(2)$ a $b^s_p = diag(v^p, \ldots, v^{p+2s})$ jest diagonalną reprezentacją grupy $U(1)$, to ich iloczyn tensorowy*

$$u^s_p := d^s \oplus\!\!\!\!\!\!\bigcirc\, b^s_p$$

jest nieprzywiedlną unitarną koreprezentacją grupy kwantowej $U_q(2)$.

W koncowej części artykułu [Wys04] podałem jawny opis operatora Kaca-Takesaki (zwanego *multiplicative unitary*) dla grupy kwantowej $U_q(2)$. Poprzednio znany był tylko jeden taki jawny opis, podany dla grupy kwantowej $SU_q(2)$ przez E. Christofera Lance'a [24]. Wzór, który podałem, jest dosyć skomplikowany, a wygląda następująco.

Twierdzenie ([Wys04], Theorem 6.2). *Operator Kaca-Takesaki $\mathcal{W}$ dla grupy kwantowej $U_q(2)$ działa na przestrzei Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, gdzie $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$, i zadany jest wzorami (w których korzystam z notacji zwanej leg numbering)*

$$\mathcal{W} := w_{124568} \Sigma_{(2356)(48)} w^*_{234568} \Sigma_{(48)} S^*_{58} S_{28} S_{84} S_{48} \Sigma_{(2635)}$$

Dowód tego wzoru i objaśnienie znaczenia poszczególnych symboli zajmuje w [Wys04, Section 6] *strony 339-346. Mówiąc dosyć ogólnie, S jest operatorem Stinespringa $S(x \otimes y) = y \otimes x$, Σ jest permutacją czynników w iloczynie tensorowym a w jest głównym budulcem operatora Kaca-Takesaki dla $SU_q(2)$, skonstruowanym przez Lance'a (por.* [24]*, wzór (1.11), gdzie jest on oznaczony jako v).*

Takie same wyniki, dotyczące $*$-reprezentacji C^*-algebry $C^*(U_q(2))$, dla $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, opublikowano później w później w [25], jednak autorzy nie zacytowali mojej pracy. Mimo tego mój artykuł [Wys04] zainspirował pewne dalsze badania. W szczególności Uwe Franz, Adam Skalski i Reiji Tomatsu [26] korzystali z moich wyników w badaniu stanów indempotentnych, Anna Kula [27] uogólniła moje wyniki i otrzymała pełną klasyfikację, dla $N = 3$, grup kwantowych które powstają z konstrukcji Woronowicza. Struktura produktu skręconego pojawiła się także w pracy Piotra Sołtana [28], w której badał on sfery Podlesia, a także jako przykład konstrukcji rozszerzenia, w sensie Veinermana i Vaesa, w artykule [29].

Później zauważyłem (i opublikowałem [Wys2009a] w Kyoto University Information Repository KURENAI http://hdl.handle.net/2433/140904), że dla $N \geq 4$ warunki unitarności i skręconego wyznacznika trywializują się dla układu E zdefiniowanego przy pomocy funkcji $c : S_N \mapsto \mathbb{N}$ liczącej ilość cykli.

4.5. **t-deformacja, artykuły** [BWys98, BWys01, Wys06]**.** W artykule [BWys98] napisanym wspólnie z Markiem Bożejko, zdefiniowaliśmy nową transformatę na zbiorze $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$ miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$ w następujący sposób. Dla $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ rozważamy jej transformatę Cauchy'ego (czy też Cauchy'ego-Stieltjesa), określoną dla $z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ wzorem

$$G_\mu(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(dx)}{z-x}$$

Wówczas dla $0 \le t \le 1$ i pary miar probabilistycznych $\mu, \rho \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ wzór

$$\frac{1}{G_\eta(z)} := \frac{t}{G_\mu(z)} + \frac{1-t}{G_\rho(z)}, \quad \operatorname{Im}(z) > 0,$$

określa nową miarę probabilistyczną η. Wynika to z twierdzenia Nevanlinny o reprezentacji odwrotności transformaty Cauchy'ego miary probabilistycznej, które zapewnia, że prawa strona powyższego wzoru jest taką odwrotnością pewnej miary probabilistycznej η, która zależy od μ i ν oraz od parametru t. Dla $\rho = \delta_0$ można wywnioskować więcej, mianowicie dla $t \ge 0$ określamy t-transformatę $\eta = \mu_t$ miary μ wzorem

$$\frac{1}{G_{\mu_t}(z)} := \frac{t}{G_\mu(z)} + (1-t)z, \quad \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Odwzorowanie $\mathcal{U}_t : \mathcal{PM}(\mathbb{R}) \ni \mu \mapsto \mu_t \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ nazywamy t-transformatą. Rodzina $\{\mathcal{U}_t : t \ge 0\}$ jest ciągłą półgrupąmultyplikatywną na $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$, która komutuje z dylatacjami miar. W szczególności mamy $\mathcal{U}_t^{-1} = \mathcal{U}_{1/t}$.

Pozwala to nazdefiniowanie t-transformaty dowolnego splotu. Mianowicie, jeśli $\star$ jest jakimś danym splotem, na przykład klasycznym, wolnym, boole'owskim, monotonicznym czy innym, to określamy nowy splot $\star_t$ jako

$$\mu \star_t \nu := \mathcal{U}_{1/t}(\mu_t \star \nu_t), \quad \text{for} \quad \mu, \nu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R}).$$

Dla takiej transformacji splotów pokazaliśmy następujące twierdzenie graniczne. Niech D_a oznacza dylatację miary przez $a \in \mathbb{R}$, czyli $D_a(\mu)(E) = \mu(a^{-1}E)$.

Twierdzenie. [BWys98, Theorem 7] *Załóżmy, że miara probabilistyczna $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ ma średnią 0 i wariancję 1, oraz że istnieje miara probabilistyczna $\nu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$, która jest $*$-słabą granicą n-krotnych splotów dylatacji miary μ*

$$\underbrace{D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\mu) \star \ldots \star D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\mu)}_{n \text{ times}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu.$$

Wówczas, dla t-transformacji splotu $\star_t$ istnieje $*$-słaba granica, oznaczana ν^t

$$D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\mu) \star_t \ldots \star_t D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu^t$$

W szczególności, jeśli ν jest miarą w centralnym twierdzeniu granicznym dla splotu $\star$, to ν^t jest miarą w centralnym twierdzeniu granicznym dla $\star_t$.

Opisaliśmy także transformację $\nu \mapsto \nu^t$ w języku rozwinięć transformat Cauchy'ego w ułamki łańcuchowe.

Transformacja $\nu \mapsto \nu^t$ jest w pewnym sensie dopełnicza względem t-transformacji, jak pokazują poniższe rozwinięcia w ułamki łancuchowe. Mianowicie, dla t-transformacji, jeśli

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - a_1 - \cfrac{b_1}{z - a_2 - \cfrac{b_2}{z - a_3 - \cfrac{b_3}{z - a_4 - \cfrac{b_4}{z - a_5 - \cfrac{b_5}{\ddots}}}}}}$$

to

$$G_{\mu_t}(z) = \cfrac{1}{z - t \cdot a_1 - \cfrac{t \cdot b_1}{z - a_2 - \cfrac{b_2}{z - a_3 - \cfrac{b_3}{z - a_4 - \cfrac{b_4}{z - a_5 - \cfrac{b_5}{\ddots}}}}}}$$

Z drugiej strony, dla miary ν z centralnego twierdenia granicznego i dla t-transformaty splotu, jeśli

$$G_\nu(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{b_1}{z - \cfrac{b_2}{z - \cfrac{b_3}{z - \cfrac{b_4}{z - \cfrac{b_5}{\ddots}}}}}}$$

to

$$G_{\nu^t}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{b_1}{z - \cfrac{tb_2}{z - \cfrac{tb_3}{z - \cfrac{tb_4}{z - \cfrac{tb_5}{\ddots}}}}}}$$

Badania te były kontynuowane w pracy [BWys01] wspólnej z Markiem Bożejko. Zauważyliśmy w niej, że t-transformata $\mathcal{U}_t\mu := \mu_t$ miary μ jest w istocie jej t-tą potęgą w splocie boole'owskim. Wynika to ze wzoru [BWys01, (4.13)] dla kumulant boole'owskich $K_\mu(z)$:

$$K_{\mu_t}(z) = tK_\mu(z).$$

Następnie rozważaliśmy centralne twierdzenia graniczne dla splotu klasycznego $*$ i dla splotu wolnego $\oplus$. Przypomnijmy, że dla splotu wolnego, centralne twierdzenie graniczne daje (absolutnie ciągły) rozkład Wignera (ang. *semi-circle law*)

$$w(dx) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, \quad |x| \leq 2,$$

dla którego transformata Cauchu'ego ma rozwinięcie w ułamek łańcuchowy postaci

$$G_w(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \ddots}}}}}$$

Okazuje się, że dla t-transformaty splotu wolnego odpowiednie miary w centralnym twierdzeniiu granicznym są związane z miarami Kestena [3] $\nu_n = w^{t_n}$, $n \geq 2$, dla $t_n := 1 - \frac{1}{2n}$: dla ustalonego $n \geq 2$ jest to miara spektralna dla prostego spaceru losowego na grupie wolnej $\mathbb{F}_n$ o n wolnych generatorach. Transformata Cauchy'ego miary Kestena w^{t_n} ma rozwinięcie w ułamek łańcuchowy postaci

$$G_{\nu_n}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{t_n}{z - \cfrac{t_n}{z - \cfrac{t_n}{z - \cfrac{t_n}{\ddots}}}}}}$$

W ogólnym przypadku $t > 0$ znaleźliśmy wzory na momenty $m_n(w^t)$ miary w^t z centralnego twierdzenia granicznego dla t-transformacji $\oplus_t$ splotu wolnego $\oplus$: $m_{2n+1}(w^t) = 0$ dla $n \geq 0$ oraz

$$m_{2n}(w^t) = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{NC}_2(2n)} t^{\sharp in(\mathcal{V})}, \quad n \geq 0.$$

Powyższe sumowanie jest po zbiorze $\mathcal{NC}_2(2n)$ wszystkich nieprzecinających się dwupartycji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ a $\sharp in(\mathcal{V})$ oznacza liczbę *bloków wewnętrznych* w partycji $\mathcal{V}$ [BWys01, Formula (6.18)]. Badaliśmy też wielomiany $C_n(t) := m_{2n}(w^t)$, określone przez parzyste momenty miary w^t, dla których pokazaliśmy następujący fakt.

Proposition. [BWys01, Proposition 6.1] *Dla $n = 1, 2, \ldots$ wielomian $C_n(t)$ zmiennej t ma stopień $n-1$ i jest dany wzorem $C_1(t) = 1$ oraz*

$$\mathcal{C}_n(t) = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} t^{k+1} \cdot \left\{ \binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k} \right\}, \quad n \geq 2.$$

Współczynniki

$$\binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k}, \quad 0 \leq k \leq n-2, n \geq 2$$

tworzą *tablicę Delaney'a*

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 2 & & & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & & & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 & & \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42 & \\
1 & 6 & 20 & 48 & 90 & 132 & 132 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Następnie podaliśmy konstrukcję t-zdeformowanej wolnej przestrzeni Focka i operatorów których rozkłady, względem stanu próżniowego φ, są miarą w^t. Mianowicie, operatory te były wolnymi operatorami t-Gaussowskimi, czyli sumami $G_t(f) = a_t(f) + a_t^\dagger(f)$ operatora t-kreacji $a_t^\dagger(f)$ i operatora t-anihilacji $a_t(f)$, dla wektorów jednostkowych $\|f\| = 1$. t-deformacja wolnej przestrzeni Focka polegała na domnożeniu iloczynów skalarnych przez kolejne potęgi parametru t:

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_1 \otimes \ldots \otimes y_k \rangle = \delta_{n,k} \cdot t^{n-1} \cdot \prod_{j=1}^{n} \langle x_j, y_j \rangle.$$

W centralnym twierdzeniu granicznym dla t-transformaty $*_t$ splotu klasycznego $*$ miarą graniczną $\mathcal{N}^t$ jest transformata $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}^t$ rozkładu normalnego $\mathcal{N}$. Znaleźliśmy wzór na mommenty miary $\mathcal{N}^t$.

Proposition. [BWys01, Proposition 8.3] *Momenty parzyste $m_{2n}(\mathcal{N}^t)$ są dane wzorem*

$$m_{2n}(\mathcal{N}^t) = \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(2n)} t^{n - \sharp oc(\mathcal{V})}, \quad n \geq 0.$$

Momenty nieparzyste są zerowe.

W powyższym wzorze sumowanie jest po wszystkich dwupartycjach zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ (tutaj przecięcia są dopuszczalne), natomiast $\sharp oc(\mathcal{V})$ oznacza liczbę *zewnętrznych składowych spójnych* partycji $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_2(2n)$. Warto zauważyć, że o ile dla partycji bez przecięć pojęcia *bloków* wewnętrznych i zewnętrznych są dobrze określone, o tyle dla partycji z przecięciami właściwe i dobrze określone są pojęcia wewnętrznych i zewnętrznych *składowych spójnych*.

Dla przypadku t-transformacji splotu klasycznego także skonstruowaliśmy t-zdeformowaną symetryczną przestrzeń Focka i operatory t-Gaussowskie (sumy odpowiednich kreacji i anihilacji), których rozkłady, względem stanu próżniowego, były miarami $\mathcal{N}^t$.

Wiadomo, że splot $\star$ definiuje relację pomiędzy momentami $m_n(\mu)$ danej miary μ a jej kumulantami $r_n^{(\star)}(\mu)$, w szczególności

$$\begin{aligned}
m_n(\mu) &= \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{NC}(n)} r^{(\oplus)}(\mathcal{V}), \quad \text{dla splotu wolnego} \quad \star = \oplus \\
m_n(\mu) &= \sum_{\mathcal{V} \in \mathcal{P}(n)} r^{(*)}(\mathcal{V}), \quad \text{dla splotu klasycznego} \quad \star = *
\end{aligned}$$

.

W tych wzorach, dla $\star \in \{*, \oplus\}$ mamy notację $r^{(\star)}(\mathcal{V}) = r_{k_1}(\mu) \cdot \ldots \cdot r_{k_m}(\mu)$ jeśli partycja $\mathcal{V}$ składa się z m bloków $\mathcal{V} = \{B_1, , B_m\}$ o licznościach $k_j := |B_j|$, dla $j - 1, \ldots, m$. Znaleźliśmy analogiczne wzory dla t-transformacji splotów klasycznego i wolnego.

Proposition. [BWys01, Propositions 10.3, 10.4]

$$
\begin{aligned}
m_n(\mu) &= \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{NC}(n)} r^{(\oplus_t)}(\mathcal{V})t^{-\sharp out(\mathcal{V})}, && \textit{dla t-transformacji splotu wolnego} \quad \oplus_t \\
m_n(\mu) &= \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{P}(n)} r^{(*_t)}(\mathcal{V})t^{-\sharp oc(\mathcal{V})}, && \textit{dla t-transformacji splotu klasycznego} \quad *_t
\end{aligned}
$$

.

Końcowa część artykułu [BWys01] jest poświęcona badaniu twierdzeń granicznych typu Poissona dla t-transformacji splotu wolnego i klasycznego. Wolna miara Poissona o intensywności $0 \leq \alpha \leq 1$ ma rozwinięcie (swojej transformaty Cauchy'ego) w ułamek łańcuchowy

$$
G_\mu(z) = \cfrac{1}{z-\alpha-\cfrac{\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{\alpha}{\ddots}}}}}.
$$

Pokazaliśmy, że dla t-transformacji $\oplus_t$ splotu wolnego odpowiadająca miara w analogicznym twierdzeniu granicznym typu Poissona jest dana wzorem [BWys01, 11.40]

$$
G_\mu(z) = \cfrac{1}{z-s\cdot\alpha-\cfrac{s\cdot\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{t\cdot\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{t\cdot\alpha}{z-(1+\alpha)-\cfrac{t\cdot\alpha}{\ddots}}}}}, \quad s := \frac{1}{t}
$$

W przypadku $t$transformaty $*_t$ splotu klasycznego korzystaliśmy z transformaty Fouriera by uzyskać wzór na miarę $\rho(t)$ w analogicznym twierdzeniu granicznym typu Poissona.

Wniosek. [BWys01, Corollary 11.4]

$$
\rho(t) = e^{-t\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\alpha)^n}{n!}\delta_{n+(1-t)\alpha}
$$

W moich dalszych badaniach t-transformacji [Wys06] udowodniłem (Theorem 2.1), że algebra von Neumanna generowana przez przeliczalnie wiele wolnych operatorów t-Gaussowskich $\{G_t(e_j):\ j=1,2,\ldots\}$, określonych na wektorach bazy ortonormalnej $\{e_j : j \geq 1\} \subset H$, jest faktorem typu I_∞. Ten wynik był motywacją dla Erica Ricarda, który uogólnił go na dowolną skończoną liczbę wolnych operatorów t-Gaussowskich.

Artykuły [BWys98, BWys01] mają łącznie 70 cytowań wg MathSciNet i zainspirowały wiele dalszych badań.

4.6. **bm-niezależność, artykuły** [Wys07, Wys08, Wys10, KWys10, OWys20]**.** Pojęcie bm-niezależności ma swoje początki w mojej konstrukcji *słabo monotonicznej przestrzeni Focka* [Wys05], a propos której Viacheslav Belavkin postawił mi pytanie czy taką konstrukcję można uogólnić na częściowo uporządkowane zbiory indeksów zamiast $\mathbb{N}$. W zbiorze częściowo uporządkowanym dwa elementy mogą być nieporównywalne i to stanowi istotną różnicę w porównaniu z liczbami naturalnymi, które zazwyczaj stanowią zbiór indeksów dla klasycznych czy nieprzemiennych zmiennych losowych. Dodatkowo, badania Rolanda Speichera [31] i Naofumi Muraki

[33] pokazały, że jest tylko pięć (uniwerslnych) pojęć niezależności (tensorowa czyli klasyczna, wolna, boole'owska, monotoniczna i antymonotoniczna). Jednakże warunek uniwersalności jest tutaj kluczowy: bm-niezależność nie jest uniwersalna (w znaczeniu tych badań).

4.6.1. *artykuły* [Wys07, Wys08]. Badałem problem postawiony przez Belavkina w pracy [Wys07], uzyskując częściową odpowiedź, mianowicie pokazałem konstrukcję bm-produktu rodziny przestrzeni Hilberta, indeksowanych zbiorem częściowo uporządkowanym, oraz konstrukcję bm-rozszerzeń operatorów zadanych na tych przestrzeniach.

Dla zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{X}, \preceq)$ i dla rodziny $\{H_\xi : \xi \in \mathcal{X}\}$ przestrzeni Hilberta indeksowanych elementami $\mathcal{X}$, które mają wspólny wektor jednostkowy Ω, określamy

- **bm-produkt**
$$\mathcal{H} := \circledast_{\xi \in \mathcal{X}} H_\xi$$
jako przestrzeń Hilberta rozpiętą przez Ω oraz tensory proste postaci
$$h_{\xi_n} \otimes h_{\xi_{n-1}} \otimes \dots h_{\xi_1}, \quad h_{\xi_j} \in H_{\xi_j}, h_{\xi_j} \perp \Omega, \quad \xi_1 \prec \xi_2 \prec \dots \prec \xi_n$$
dla $j = 1, 2, \dots, n$ i $n \in \mathbb{N}$
- **bm-rozszerzenie operatora ograniczonego** $A_\xi \in B(H_\xi)$ na bm-produkt $\mathcal{H}$ ([Wys08, Definition 2.1])

Konstrukcja ta miała taką własność, że operatory, indeksowane podzbiorami liniowo uporządkowanymi, były wolnie niezależne, natomiast operatory indeksowane zbiorami całkowicie nieuporządkowanymi (antyłańcuchami) były niezależne boole'owsko. Podałem jeszcze pewne dodatkowe warunki spełniane przez tą konstrukcję, które nazwałem BM1 i BM2. Następnie, dla bm-rozszerzeń operatorów, udowodniłem analogi klasycznego centralnego twierdzenia granicznego (w skrócie: CTG), dobierając szczególne przykłady zbiorów częściowo uporządkowanych. Badania te kontynuowałem w pracy [Wys08]. Twierdzenia graniczne formułowałem w słabym sensie, jako zbieżność momentów unormowanych sum bm-rozszerzeń operatorów. Taki rodzaj zbieżności jest standardem w nieprzemiennej probalistyce, gdzie zmienne losowe nie są funkcjami mierzalnymi lecz samosprzężonymi elementami danej C^*-algebry.

W szczególności, w pracach [Wys07, Wys08] udowodniłem następujące wersje CTG dla bm-rozszerzeń.

1. [Wys07, Theorem 4.1] Dla zbioru indeksów $\mathbf{I} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy $J_{MN} := \{(a, b) \in \mathbf{I} : 0 \le a \le M, \ 0 \le b \le N\}$ oraz
$$S_{MN} := \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{\xi \in J_{MN}} A_\xi,$$
gdzie A_ξ są bm-rozszerzeniami operatorów. Assume that φ is the vacuum state and that $\varphi(A_\xi) = 0$, $\varphi(A_\xi^2) = 1$ for all $\xi \in \mathbf{I}$. Then for ever $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{M,N \to \infty} \varphi((S_{MN})^{2n+1}), \\ g_n &= \lim_{M,N \to \infty} \varphi((S_{MN})^{2n}), \end{aligned}$$
gdzie $(g_n)_{n \ge 0}$ jest ciągiem (parystych) momentów symetrycznej miary probabilistycznej na $\mathbb{R}$, która spełnia rekurencję$g_0 = g_1 = 1$ oraz
$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} g_{k-1} g_{n-k}$$

Jest ona równoważna [Wys07, Remark 3.3] rekurencji dla liczb naturalnych

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 b_{k-1} b_{n-k}, \quad \text{with the substitution} \quad b_n := (n!)^2 g_n \in \mathbb{N},$$

która zlicza pewne uporządkowane drzewa z korzeniem. W ogólniejszym przypadku $I_d := \mathbb{N}^d$, dla $d \geq 2$, otrzymałem rekurencję

$$g_n(d) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^d} \cdot g_{k-1}(d) \cdot g_{n-k}(d)$$

Jest ona równoważna [Wys07, Remark 3.4] rekurencji dla liczb naturalnych

$$b_n(d) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^d \cdot b_{k-1}(d) \cdot b_{n-k}(d), \quad \text{podstawienie:} \quad b_n(d) := (n!)^d g_n(d) \in \mathbb{N},$$

2. [Wys07, Theorem 5.5] Dla stożków Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego i zbioru indeksów $I_d := \{(k; \mathbf{m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : k \geq \|\mathbf{m}\|\}$, określiłem podzbiory skończone $J_N := \{(k; \mathbf{m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : \ \|\mathbf{m}\| \leq k \leq N\}$. Dla każdego $d \geq 2$ otrzymałem bm-wersję centralnego twierdzenia granicznego (bm-CTG) dla bm-rozszerzeń operatorów, w których momenty parzyste $g_n(d)$ (symetrycznej) miary granicznej spełniają rekurencję $g_0(d) = g_1(d) = 1$ and
$$g_n(d) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k(d+1)}{d+1}^{-1} \cdot g_{k-1}(d) \cdot g_{n-k}(d), \quad n \geq 2.$$
3. [Wys08, Theorem 6.1] Dla stożka dodatniego $\Pi_d = \mathtt{Symm}_+^d(\mathbb{R})$ symetrycznych dodatnio określonych d-wymiarowych acierzy rzeczywistych i dla zbioru indeksów $I_d \subset \Pi_d$ składającego się z takich macierzy w Π_d, których wyrazy są liczbami całkowitymi, określiłem podzbiory skończone
$$J_{\mathbf{N}} := \{(a_{jk})_{j,k=1}^d \in \Pi_d : \ 0 \leq a_{jj} \leq N_j\}, \quad \text{where} \quad \mathbf{N} := (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d.$$
Podobnie, dla każdego $d \geq 2$, otrzymałem bm-CTG dla bm-rozszerzeń operatorów, w których ciąg parzystych momentów $g_n(d)$ (symetrycznej) miary granicznej spełnia rekurencję $g_0(d) = g_1(d) = 1$ oraz
$$g_n(d) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_d(k)^d \cdot g_{k-1}(d) \cdot g_{n-k}(d), \quad n \geq 2.$$
gdzie ciąg $(\gamma_d(k))_{k \in \mathbb{N}}$ jest określony przez funkcję beta Eulera
$$\gamma_d(k) := \frac{d+1}{2} B(\frac{d+1}{2}; \frac{(k-1)(d+1)}{2}), \quad B(a+1; b+1) := \int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx$$

4.6.2. *artykuł* [Wys10]. W pracy [Wys08] sformułowałem warunki bm-niezależności jedynie dla bm-rozszerzeń operatorów. Ostateczna wersja w pełnej ogólności ukazała się w moim artykule [Wys10] w następującej postaci.

Definicja. [Wys10, Definition 2.1] *Niech* $(\mathbf{I}, \preceq)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech* $\mathcal{B}$ *będzie algebrą z zadanym na niej funkcjonałem liniowym* $\varphi : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{C}$. *Mówimy, że rodzina podalgebr* $\{\mathcal{B}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ *algebry* $\mathcal{B}$, *indeksowana zbiorem* $\mathbf{I}$, *jest* ***bm-niezależna*** *względem* φ, *jeśli spełnia następujące dwa warunki:*

BM1. *Jeśli* $\xi, \eta, \rho \in \mathbf{I}$ *spełniają:* $\xi \prec \rho \succ \eta$ *lub* $\xi \nsim \rho \succ \eta$ *lub* $\xi \prec \rho \nsim \eta$, *to dla dowolnych elementów* $b_\xi \in \mathcal{B}_\xi$, $b_\rho \in \mathcal{B}_\rho$, $b_\eta \in \mathcal{B}_\eta$

(1) $$b_\xi b_\rho b_\eta = \varphi(b_\rho) \cdot b_\xi b_\eta.$$

BM2. *Jeśli* $\xi_1 \succ \ldots \succ \xi_m \nsim \ldots \nsim \xi_k \prec \ldots \prec \xi_n$ *dla pewnych* $1 \leq m \leq k \leq n$ *and* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{I}$ *to*

$$\varphi(b_{\xi_1} \ldots b_{\xi_n}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(b_{\xi_j}). \tag{2}$$

Używam tutaj notacji $\xi \nsim \eta$ jeśli elementy $\xi, \eta \in \mathbf{I}$ są nieporównywalne. Jeśli $\mathbf{I}$ jest liniowo uporządkowany, to warunki **BM1** i **BM2** oznaczają pojęcie niezależności *monotonicznej* Muraki [32], natomiast jeśli $\mathbf{I}$ jest antyłańcuchem (czyli $\xi \nsim \eta$dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbf{I}$), to warunek **BM1** nigdy nie zachodzi i otrzymujemy pojęcie niezależności boole'owskiej [Wys10, Remark 2.5].

W nieprzemiennej probabilistyce pojęcia niezależności są regułami pbliczania momentów mieszanych postaci $\varphi(b_{\xi_1} \ldots b_{\xi_n})$ za pomocą momentów indywidualnych poszczególnych elementów. W [Wys10, Lemma 2.3] pokazałem, że warunki **BM1, BM2** mają tą własność i dlatego stanowią nowe pojęcie nieprzemiennej *niezależności.* Metoda obliczania momentów mieszanych przy pomocy tych warunków polega na stosowaniu najpierw warunku **BM1** dopóki to możliwe, a do tego, co zostanie, stosuje się warunek **BM2**. Co więcej, w [Wys10, Lemma 2.4] pokazałem, że obliczenie momentu mieszanego nie zależy od tego w jakiej kolejności zastosujemy **BM1**.

W artykule [Wys10] zdefiniowałem także pojęcia bm-produktu algebr [Wys10, Definition 3.1] oraz *uogólnionego* bm-produktu przestrzeni Hilberta [Wys10, Subsection 3.3] i *uogólnionych* bm-rozszerzeń operatorów [Wys10, Definition 3.7]. Uogólniony bm-produkt został zdefiniowany w taki sposób, że otrzymałem konstrukcję o własności łączności.

Definicja. [Wys10, Subsection 3.3] *Niech* $\{\mathbf{H}_\xi : \xi \in \mathbf{I}\}$ *będzie rodziną przestrzeni Hilberta indeksowaną zbiorem częściowo uporządkowanym* $\mathbf{I}$. *Zakładamy, że te przestrzenie mają wspólny wektor jednostkowy* $\Omega \in \mathbf{H}_\xi$ *dla wszystkich* $\xi \in \mathbf{I}$. *Dla dowolnego podzbioru* $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ *przez*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{J}} = \circledast^{\mathtt{bm}}_{\xi \in \mathbf{J}} H_\xi$$

oznaczamy bm-produkt przestrzeni Hilberta H_ξ *dla których* $\xi \in \mathbf{J}$. *Jeśli* $\mathbf{J} = \emptyset$ *to z definicji* $\mathcal{H}_\emptyset = \mathbb{C}\Omega$. *Jeśli* $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2 \subset \mathbf{I}$ *to definiujemy* $\mathcal{H}_{\mathbf{J}_1} \circledast^{\mathtt{bm}} \mathcal{H}_{\mathbf{J}_2} := \mathcal{H}_{\mathbf{J}_1 \cup \mathbf{J}_2}$. *I ogólnie, jeśli* $\{\mathbf{J}_t : t \in \Lambda\}$ *jest rodziną podzbiorów* $\mathbf{I}$ *to określamy*

$$\circledast^{\mathtt{bm}}_{t \in \Lambda} \mathcal{H}_{\mathbf{J}_t} =: \mathcal{H}_{\mathbf{J}}, \quad \text{dla} \quad \mathbf{J} := \bigcup_{t \in \Lambda} \mathbf{J}_t$$

Konstrukcja ta ma następujące własności;

- *jeśli* $\mathbf{J}_1 \subset \mathbf{J}_2$ *to* $\mathcal{H}_{\mathbf{J}_1} \subset \mathcal{H}_{\mathbf{J}_2}$,
- ***łączność:*** *jeśli* $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3 \subset \mathbf{I}$ *to*

$$\left(\mathcal{H}_{\mathbf{J}_1} \circledast^{\mathtt{bm}} \mathcal{H}_{\mathbf{J}_2}\right) \circledast^{\mathtt{bm}} \mathcal{H}_{\mathbf{J}_3} = \mathcal{H}_{\mathbf{J}_1 \cup \mathbf{J}_2 \cup \mathbf{J}_3} = \mathcal{H}_{\mathbf{J}_1} \circledast^{\mathtt{bm}} \left(\mathcal{H}_{\mathbf{J}_2} \circledast^{\mathtt{bm}} \mathcal{H}_{\mathbf{J}_3}\right)$$

Następnym wyzwaniem, po sformułowaniu pojęcia bm-niezależności i zbadaniu jego własności, było udowodnienie bm-analogów CTG dla ogólnych bm-niezależnych zmiennych losowych. Samo sformułowanie stanowiło problem, jak również dobranie odpowiednich zbiorów indeksów w zadanym zbiorze częściowo uporządkowanym. Okazało się, że dobrymi obiektami do tych badan są *symetryczne stożki dodatnie*, których klasyfikację podali Jacques Faraut i Adam Koranyi w [34]. Oto ich lista, dla $d \in \mathbb{N}$:

(1) $\Pi = (\mathbb{R}_+)^d$, for $d \in \mathbb{N}$;
(2) $\Pi = \Lambda^d_+ = \{(t; x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : \ t \geq \|x\|\}$, stożki Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego;
(3) $\Pi = \mathtt{Symm}^d_+(\mathbb{R})$, symetryczne dodatnio określone rzeczywiste macierze d-wymiarowe;
(4) $\Pi = \mathtt{Herm}^d_+(\mathbb{F})$, hermitowskie dodatnio określone macierze d-wymiarowe o wyrazach zesplonych $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ lub wyrazach kwaternionowych $\mathbb{F} = \mathbb{H}$;

(5) $\Pi = \mathtt{Herm}^3_+(\mathbb{O})$, dodatnio określone macierze hermitoweskie wymiaru 3 o wyrazach będących oktawami Cayleya $\mathbb{F} = \mathbb{O}$ (jednak tego przypadku nie rozważałem)

W artykule [Wys10] rozważałem przypadek $\Pi = \mathtt{Herm}^d_+(\mathbb{F})$ dla $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, przy czym dyskretny podzbiór indeksów $\mathbf{I}_d \subset \Pi$ składał się z macierzy o wyrazach postaci $z = a+bi \in \mathbb{C}$ gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $w = a + bi + cj + dk$ dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ (tutaj i, j, k są jednostkami kwaternionowymi). Te zbiory indeksów zastępują liczby naturalne $\mathbb{N}$, które numerują zmienne losowe w klasycznym czy nieprzemiennych CTG. Co więcej, w takich twierdzeniach rozważa się sumy $N \in \mathbb{N}$ niezależnych zmiennych losowych $S_N := \frac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + \ldots + X_N)$, unormowanych czynnikiem $(\sqrt{N})^{-1}$. W moich badaniach określiłem zakres sumowania zbiorami skończonymi $J_{\mathbf{N}} \subset \mathbf{I}_d$, zdefiniowanymi przy pomocy ciągów d-elementowych $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ wzorem

$$(a_{jk})_{j,k=1}^d \in J_{\mathbf{N}} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad 0 \le a_{jj} \le N_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Przy takich założeniach udowodniłem następujące bm-CTG. W jego sformułowaniu używam notacji $p := \dim(\mathbb{F}_{\mathbb{R}})$ na oznaczenie rzeczywistego wymiaru $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (czyli $p \in \{2, 4\}$).

Twierdzenie. [Wys10, Theorem 5.4] *Dla $d \ge 3$ niech $\mathbf{I}_d \subset \mathtt{Herm}^d_+(\mathbb{C})$ lub $\mathbf{I}_d \subset \mathtt{Herm}^d_+(\mathbb{H})$. Ponadto, niech $\{\mathcal{B}_\xi : \xi \in \mathbf{I}_d\}$ będzie rodziną podalgebr danej $*-$algebry z jedynką $\mathcal{B}$, która jest bm-niezależna względem danego stanu φ na $\mathcal{B}$. Załóżmy także, że dane są samosprzężone elementy $b_\xi = b_\xi^* \in \mathcal{B}_\xi$, które spełniają $\varphi(b_\xi) = 0$ i $\varphi((b_\xi)^2) = 1$. Rozważmy unormowane sumy częściowe*

$$S_{\mathbf{N}} := \frac{1}{\sqrt{|J_{\mathbf{N}}|}} \sum_{\xi \in J_{\mathbf{N}}} b_\xi$$

Wówczas dla dowolnego całkowitego $n \ge 0$ istnieją granice

$$\begin{aligned} g_n := g_n(d,p) &= \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \varphi((S_{\mathbf{N}})^{2n}) \\ 0 &= \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \varphi((S_{\mathbf{N}})^{2n+1}), \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{N} \to \infty$ oznacza, że $N_1, \ldots, N_d \to \infty$. Ponadto, $(g_n)_{n\ge 0}$ jest ciągiem momentów parzystych miary probabilistycznej na $\mathbb{R}$, spełniającym rekurencję: $g_0 = g_1 = 1$ oraz

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{k=1}^n (\gamma_{d,p}(k))^d \cdot g_{k-1} \cdot g_{n-k}, \quad \textit{gdzie} \\ \gamma_{d,p}(k) &= (\alpha+1) \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{(k-1)(\alpha+1)}\, dx, \quad \textit{oraz} \\ \alpha &= \frac{p(d-1)}{2}. \end{aligned}$$

Powyższe rekurencje są uogólnieniem rekurencji dla liczb Catalana $C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, dla których $\gamma(k) \equiv 1$ jest ciągiem stałym, jak również rekurencji dla momentów $M_n := \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$ rozkładu arcus sinus (CTG dla niezależnoości monotonicznej), w którym to przypadku $\gamma(k) = \frac{1}{k}$. Mianowicie,

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} \cdot C_{n-k}; \quad M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot M_{k-1} \cdot M_{n-k}.$$

Jako przykład pokazałem także że dla przypadku zespolonego (czyli $p = 2$) współczynniki są dane jawnym wzorem $\gamma_{d,2}(k) = \binom{dk}{d}^{-d}$ a dla przypadku kwaternionowego (czyli $p = 4$) są dane wzorem $\gamma_{d,4}(k) = \binom{(2d-1)k}{2d-1}^{-d}$. Wyznaczenie odpowiednich miar probabilistycznych jest nadal otwartym problemem.

W artykule [Wys10] rozważałem także przykład stożka dodatniego *niesymetrycznego* - stożka Vinberga - dla którego uzyskałem podobną rekurencję w której

$$\gamma(k) := \frac{9}{4k(2k-1)} \cdot \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}(k-1)}\, dx.$$

4.6.3. *artykuł* [KWys10]. Badania bm-niezależności kontynuowałem w artykule [KWys10] wspólnym z Anną Kulą, w której badaliśmy konstrukcje analogów ruchów Browna. Nasze badania inspirowane były wynikami Naofumi Muraki [35] dotyczącymi (ciągłej) monotonicznej przestrzeni Focka.

Ogólnie, ruch Browna jest procesem stacjonarnym o przyrostach niezależnych, które mają rozkład normalny. Przed naszymi badaniami uogólnienia ruchów Browna były w dwóch kierunkach: albo klasyczne zmienne losowe były indeksowane parametrem wielowymiarowym, albo parametr był rzeczywisty ale niezależność nieprzemienna.

Nasze podejście prowadziło do uogólnienia w obu kierunkach jednocześnie: parametr czasowy był wielowymiarowy, brany z symetrycznego stożka dodatniego, natomiast niezależność była nieprzemienna.

W nieprzemiennej probabilistyce standardowa metoda konstruowania ruchów Browna pochodzi z pracy Robina L. Hudsona and Kalyanapurama R. Parthasarathy'ego [36] i polega na braniu operatorów Gaussowskich $\mathcal{B}_t := a(\chi_{[0,t)}) + a^\dagger(\chi_{[0,t)})$ na odpowiedniej przestrzeni Focka, dla $t \geq 0$ oraz funkcji charakterystycznych (indykatorów) $\chi_{[0,t)}$ przedziałów.

Naszym celem było przeniesienie tych warunków do sytuacji bm-niezależności. Zrobiliśmy to w następujący sposób.

W zbiorze częściowo uporządkowanym $(\Pi, \preceq)$ przedziały określamy dla $\xi \preceq \eta \in \Pi$ jako $[\xi, \eta] := \{\rho \in \Pi : \ \xi \preceq \rho \preceq \eta\}$. W symetrycznych stożkach dodatnich Π, podanych w klasyfikacji Faraut'a-Koranyi'ego, przedziały $[0, \xi)$, dla $\xi \in \Pi$, mają dobrze zdefiniowaną objętość wyrażoną wzorami zależnymi od beta funkcji danego stożka.

W pracy [KWys10] rozważaliśmy jedynie stożki: $\mathbb{R}^d_+$, Λ^d_+ (stożek Lorentza), $\mathtt{Symm}^d_+(\mathbb{R})$ (przypadek rzeczywisty) i $\mathtt{Herm}^d_+(\mathbb{C})$ (przypadek zespolony). Stożki te mają następującą ciekawą własność, którą nazwaliśmy *volume characteristic* (charakterystyką objętościową).

Twierdzenie ([KWys10], Theorem 2)**.** *Dla każdego z tych symetrycznych stożków dodatnich* Π *istnieje taki ciąg* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$*, że dla dowolnego przedziału* $[\xi, \eta] \subset \Pi$ *jest*

$$\int_{[\xi,\eta]} (\mathtt{vol}[\xi, \rho])^{n-1}\, d\rho = \gamma_n \cdot (\mathtt{vol}[\xi, \eta])^n,$$

gdzie $\mathtt{vol}[\xi, \eta]$ *oznacza objętość Euklidesową przedziału* $[\xi, \eta]$.

Twierdzenie to uogólnia prostą własność liczb rzeczywistych:

$$\int_a^b (x-a)^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} \cdot (b-a)^n, \quad \text{dla} \quad 0 \leq a < b,$$

gdzie $\gamma_n = \frac{1}{n}$.

Następnie skonstruowaliśmy bm-przestrzeń Focka, a na niej operatory kreacji δ^+ i anihilacji δ^-, które posłużyły do zdefiniowania bm-ruchów Browna, oznaczonych jako

$$Q_\xi := \delta^+_{[0,\xi]} + \delta^-_{[0,\xi]}.$$

Przyrosty, będące analogami klasycznych $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$, zdefiniowaliśmy jako

$$Q_{[\xi,\eta]} := \delta^+_{[\xi,\eta]} + \delta^-_{[\xi,\eta]}, \quad \text{dla} \quad \xi \prec \eta \in \Pi.$$

Wówczas okazało się, że rozkłady takich bm-ruchów Browna, w zależności od stożka dodatniego Π, są dane przez inny rodzaj bm-CTG, w którym sumowanie bm-niezależnych zmiennych losowych jest po zdylatowanych przedziałach. Pokazaliśmy to w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie. [KWys10, Theorem 7] *Dla $N \in \mathbb{N}$ oraz $\rho \in \Pi$ określamy $J_N(\rho) = [0, N\rho] \cap \mathbf{I}_d$, gdzie $\mathbf{I}_d \subset \Pi$ składa się z elementów z wyrazami całkowitymi. Niech*

$$S_N(\rho) := \frac{1}{\sqrt{\mathtt{vol}[0, N\xi]}} \sum_{\xi \in [0, N\rho]} b_\xi,$$

przy czym b_ξ są bm-niezależnymi samosprzężonymi elementami algebry $(\mathcal{B}, \varphi)$, spełniającymi warunki $\varphi(b_\xi) = 0$ i $\varphi((b_\xi)^2) = 1$. Wówczas, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją granice

$$\begin{aligned} g_n &= \lim_{N\to\infty} \varphi(S_N(\rho)^{2n}), \\ 0 &= \lim_{N\to\infty} \varphi(S_N(\rho)^{2n+1}), \end{aligned}$$

i definiują momenty symetrycznej miary probabilistycznej $\nu = \nu(\Pi)$ na $\mathbb{R}$. Ponadto, ciąg $(g_n)_{n\geq 0}$ momentów parzystych spełnia rekurencję (uogólnioną rekurencję Catalana)

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot g_{k-1} \cdot g_{n-k},$$

gdzie $\gamma_n = \gamma_n(\Pi)$ jest charakterystyką objętościową stożka Π.

Nasze bm-ruchy Browna okazały się mieć rozkłady, względem stany próżniowego ω na bm-przestrzeni Focka, dane przez te nowe bm-CTG miary graniczne $\nu = \nu(\Pi)$ [KWys10, Theorem 16]. Ta własność odpowiadała także bm-wersji twierdzenia Donskera (jego zasady niezmienniczości), także sformułowanej i udowodnionej w [KWys10, Theorem 18].

Uzasadnienie nazwy bm-ruch Browna bierze się również z bm-niezależności przyrostów. Mianowicie, dla przedziału $I \subset \Pi$ zdefiniowaliśmy $\mathcal{A}(I)$ jako $*$-algebrę z jedynką generowaną przez operatory kreacji postaci $\delta^+(\chi_I)$ oraz anihilacji $\delta^-(\chi_I)$. Przez $\mathcal{A}$ oznaczamy $*$-algebrę z jedynką generowaną przez wszystkie operatory kreacji $\delta^+(\chi_I)$ i anihilacji $\delta^-(\chi_I)$, dla wszystkich przedziałów $I = [\xi, \eta] \subset \Pi$. Dla dwóch (rozłącznych) przedziałów $I_1, I_2 \subset \Pi$ oznaczamy

$$\begin{aligned} &I_1 \prec I_2 \quad \text{jeśli} \quad \xi_1 \prec \xi_2 \quad \text{dla wszystkich} \quad \xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2, \\ &I_1 \not\sim I_2 \quad \text{jeśli} \quad \xi_1 \not\sim \xi_2 \quad \text{dla wszystkich} \quad \xi_1 \in I_1, \xi_2 \in I_2 \end{aligned}$$

Twierdzenie. [KWys10, Theorem 10] *Niech $I_1, \ldots, I_m \subset \Pi$ będą przedziałami, które dla wszystkich $1 \leq j \neq k \leq m$ spełniają: albo $I_j \prec I_k$, albo $I_j \succ I_k$, albo $I_j \not\sim I_k$. Wówczas algebry $\mathcal{A}(I_1), \ldots, \mathcal{A}(I_m)$ są bm-niezależne. W szczególności operatory*

$$Q_{I_j} := \delta^+_{I_j} + \delta^-_{I_j} \in \mathcal{A}(I_j), \quad j = 1, \ldots, m$$

które stanowią przyrosty bm-ruchów Browna na interwałach I_j, są bm-niezależne.

Warto zauważyć że powyższe sformułowanie nie może być takie jak w przypadku rzeczywistego parametru czasowego, ponieważ na osi rzeczywistej dwa rozłączne przedziały $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ mają własność: albo $I_1 \prec I_2$ albo $I_2 \prec I_1$. Natomiast w zbiorze częściowo uporządkowanym, na przykład stożku dodatnim, dwa rozłączne przedziały nie muszą spełniać żadnej z tych relacji.

4.6.4. *bm-Prawo Małych Liczb, artykuł* [OWys20]. W artykule [OWys20] wspólnym z Lahcenem Oussi badaliśmy nieprzemienne analogi klasycznego Prawa Małych Liczb, które nazwaliśmy bm-LSN (bm-Law of Small Numbers), dla bm-niezależnych zmiennych losowych indeksowanych elementami symetrycznych stożków dodatnich. Podobnie jak w poprzednich badaniach rozważaliśmy następujące stożki dodatnie dlda $d \in \mathbb{N}$: $\Pi = (\mathbb{R}_+)^d$, $\Pi = \Lambda^d_+ = \{(t; x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d :$

$t \geq \|x\|\}$, stożki Lorentza w czasoprzestrzeni Minkowskiego, oraz $\Pi = \mathtt{Symm}_+^d(\mathbb{R})$, dodatnio określone symetryczne macierze rzeczywiste wymiaru d, w których zbiór indeksów $\mathbf{I} \subset \Pi$ składał się z elementów (wektorów, macierzy) o wyrazach całkowitych.

Jednym z podstawowych problemów było znalezienie właściwego pojęcia rozbieżności $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$, które jest kluczowe w sformułowaniu bm-LSN. W efekcie podaliśmy następujący sposób tego określenia.

Definicja. [OWys20, Definition 1.5] *Dla $\xi \in \Pi$, określamy rozbieżność $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$ następująco:*

(1) *jeśli $\xi := (a_1, \ldots, a_d) \in \Pi = \mathbb{R}_+^d$, to $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$ gdy $a_j \to \infty$ dla wszystkich $1 \leq j \leq d$,*
(2) *jeśli $\xi := (t; x) \in \Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d = \Lambda_d^1$ to $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$ gdy $t - \|x\| \to \infty$,*
(3) *jeśli $\xi \in \Pi = \mathtt{Symm}_+^d(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ i $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_d$ są wartościami własnymi macierzy ξ, to $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$ gdy $\lambda_1 \to \infty$.*

Określenia te gwarantują, w szczególności, że objętości $\mathtt{vol}[0, \xi]$ przedziałów rosną do nieskonczoności gdy $\xi \overset{\Pi}{\to} \infty$.

Główny wynik pracy [OWys20] jest następujący.

Twierdzenie. [OWys20, Theorem 4.4] *Niech $\Pi = \mathbb{R}_+^d$, $\Pi = \Lambda_d^1$ lub $\Pi = \mathtt{Symm}_+^d(\mathbb{R})$ i niech $\mathbf{I} \subset \Pi$ będzie odpowiednim podzbiorem dyskretnym indeksów w danym stożku. Niech $(\mathcal{A}, \varphi)$ będzie nieprzemienną przestrzenią probabilistyczną i niech $\{X_\rho^\xi \in \mathcal{A} : \ \rho, \xi \in \mathbf{I}, \ 0 \preceq \rho \preceq \xi\}$ będzie układem samosprzężonych (nieprzemiennych) zmiennych losowych. Załóżmy także, że*

(1) *dla każdego $\xi \in \mathbf{I}$, zmienne $\{X_\rho^\xi \in \mathcal{A} : \ 0 \preceq \rho \preceq \xi, \ \rho \in \mathbf{I}\}$ są bm-niezależne (względem φ),*
(2) *istnieje taka stała $\lambda > 0$, że dla wszystkich $\rho \in \mathbf{I}$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{\xi \overset{\Pi}{\to} \infty} \left(\sup_{\rho \in [0,\xi] \cap \mathbf{I}} \mathtt{vol}[0, \xi] \cdot \varphi((X_\rho^\xi)^n) \right) = \lambda.$$

Dla $\xi \in \mathbf{I}$, określamy sumy częściowe $S_\xi := \sum_{\rho \in [0,\xi] \cap \mathbf{I}} X_\rho^\xi$. Wówczas, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje granica

$$\lim_{\xi \overset{\Pi}{\to} \infty} \varphi((S_\xi)^n) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \lambda^{b(\pi)} V(\pi),$$

przy czym funkcja $V := V_\Pi$, określona na nieprzecinających się partycjach, zależy od stożka dodatniego i jest wyznaczona przez granicę

$$V(\pi) = \lim_{\xi \overset{\Pi}{\to} \infty} \frac{|\mathtt{BMO}(\pi, \xi)|}{\mathtt{vol}[0, \xi]^{b(\pi)}}.$$

Tutaj $b(\pi)$ jest liczbą bloków partycji π, natomiast granica istnieje dla każdej partycji $\pi \in \mathcal{NC}(n)$.Ponadto funkcja $V(\pi)$ spełnia następujący wzór rekurencyjny:

(1) *Jeśli $b(\pi) = 1$, to $V(\pi) = 1$.*
(2) *Jeśli $b(\pi) \geq 2$, to*

$$V(\pi) = \gamma_{k_1'+1} V(\pi_1') V(\pi_2'),$$

przy czym ciąg $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest charakterystyką objętościową danego stożka dodatniego $\gamma_n = \gamma_n(\Pi)$.

Funkcja $V(\pi)$, określona na nieprzecinających partycjach, spełnia rekurencję podaną w [OWys20, Corollary 4.5], z wyjaśnieniami znajdującymi się w [OWys20, Notations 4.2 and 4.3.]. Oznaczenie $\mathtt{BMO}(\pi, \xi)$ wymaga dodatkowego wyjaśnienia.

Definicja ([OWys20], Definition 4.1)**.** *Niech $\mathcal{NC}(n;k) \subset \mathcal{NC}(n)$ będzie podzbiorem tych partycji bez przecięć, które mają dokładnie k bloków. Dla $\pi = (B_1, \dots, B_k) \in \mathcal{NC}(n;k)$ oraz $\xi \in \Pi$ określamy*

$$\mathtt{BMO}(\pi, \xi) := \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) : \mu_j = l(B_j) \in [0, \xi] \cap \mathbf{I}\ 1 \le j \le k, \ \textit{oraz}\ \mu \lhd_L \pi\}.$$

W tej definicji $l(B)$ oznacza etykietę (*label*) danego bloku, natomiast $\mu \lhd_L \pi$ oznacza, że ciąg $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ elementów z $[0, \xi] \cap \mathbf{I}$ zadaje *ścisły bm-porządek* na partycji π [OWys20, Definition 3.8]. Jest to wyjaśnione w [OWys20, Section 3], w której przedstawiliśmy także algorytm obliczania momentów mieszanych. W szczególności Lemat 3.1 i Theorem 3.12 pokazują kluczowe własności kombinatoryczne wykorzystywane do dowodu bm-LSN.

Wyjaśnię to pokrótce. Do dowodu głównego twierdzenia potrzeba obliczenia granicy, przy $\xi \xrightarrow{\Pi} \infty$, momentów $\varphi((S_\xi)^n)$. Taki moment jest sumą składników postaci $\varphi(X^\xi_{\rho_1} \cdot \ldots \cdot X^\xi_{\rho_n})$, gdzie $\rho_1, \dots, \rho_n \in [0, \xi] \cap \mathbf{I}$. Z ciągiem $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ związana jest jednoznacznie partycja π zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, której bloki łączą jednakowe elementy ciągu. W ten sposób każdy blok $B \in \pi$ otrzymuje etykietę (*label*) $l(B)$ taką, że $j \in B$ jeśli $\rho_j = l(B)$. Taka partycja π może mieć przecięcia, ale pokazaliśmy algorytm (w Remark 2.3) który, wykorzystując bm-niezależność, wytwarza jedyną nieprzecinającą partycję $\tau = (B_1, \dots, B_k)$, która jest ściśle bm-uporządkowana i stanowi maksymalne rozdrobnienie π. Ta partycja pozwala obliczyć dany moment mieszany wzorem [OWys20, (2.3)]

$$\varphi(X^\xi_{\rho_1} \cdot \ldots \cdot X^\xi_{\rho_n}) = \prod_{j=1}^{k} \varphi\left(\prod_{s \in B_j} X_{\rho_s}\right),$$

gdzie dla $1 \le j \le k$ jeśli $B_j \in \tau$ spełnia $|B_j| = p$ i $B_j = \{\rho_{s_1} < \cdots < \rho_{s_p}\}$ to

$$\varphi\left(\prod_{s \in B_j} X_{\rho_s}\right) := \varphi(X^\xi_{\rho_{s_1}} \cdot \ldots \cdot X^\xi_{\rho_{s_p}}).$$

W [OWys20, Sections 5, 6] przedstawiamy redykcję dowodu głównego twierdzenia do oszacowań liczności obiektów kombinatorycznych, mianowicie mocy zbiorów $\mathtt{BMO}(\pi, \xi)$. W szczególności w Section 6 podajemy dowód głównego wyniku kombinatorycznego tego artykułu.

Twierdzenie. [OWys20, Theorem 6.1] *Niech $\pi \in \mathcal{NC}(n;k)$ będzie nieprzecinającą partycją o $1 \le k = b(\pi) \le n$ blokach. Wówczas istnieją granice*

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \xrightarrow{\Pi} \infty} \frac{|\mathtt{BMO}(\pi, \xi)|}{\mathtt{vol}[0, \xi]^k} &= V(\pi), \\ \lim_{\xi \xrightarrow{\Pi} \infty} \varphi((S_\xi)^n) &= \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \lambda^{b(\pi)} V(\pi), \end{aligned}$$

Funkcja $V = V(\Pi)$ zależy od symetrycznego stożka dodatniego Π.

Dowód tego faktu jest oparty na następującym lemacie.

Lemat. [OWys20, Lemma 6.2] *Jeśli $\pi \in \mathcal{NC}(n,k)$ jest nieprzecinającą partycją o $k = b(\pi)$ blokach, todla każdego z rozważanych symetrycznych stożków dodatnich Π istnieje granica*

$$\lim_{\xi \xrightarrow{\Pi} \infty} \frac{1}{v(\xi)} \sum_{\rho \in [0, \xi]_{\mathbf{I}}} \frac{|\mathtt{BMO}(\pi; \rho)|}{\mathtt{vol}[0, \rho]^k} \cdot \left(\frac{\mathtt{vol}[0, \rho]}{\mathtt{vol}[0, \xi]}\right)^k = V(\pi) \cdot \gamma_{k+1},$$

gdzie $\gamma_k = \gamma_k(\Pi)$ jest charakterystyką objętościową stożka Π a funkcja $V = V(\Pi)$ zależy tylko od stożka Π i partycji π.

Idea dowodu tego lematu oparta jest na następującej prostej własności całki Riemanna na przedziale $[0,1]$.

Proposition. [OWys20, Proposition 6.3] *Jeśli $f \in C([0,1])$ jest ciągła i nieujemna a $(c_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżnym ciągiem liczb $\lim_n c_n = c$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = c\int_0^1 f(x)\, dx. \tag{3}$$

Dowód tej własności polega na podzieleniu przedziału sumowania $[1,n]\cap\mathbb{N}$ na dwi części: jedną postaci $[n_0,n]\cap\mathbb{N}$ na której c_n jest blisko c, oraz drugiej postaci $[1,n_0]\cap\mathbb{N}$, na której suma jest skończona i dąży do zera gdy $n\to\infty$. Naśladując ten schemat w przypadku stożków dodatnich napotyka się problem, że dla ustalonego $\xi\in\Pi$ oraz dla $\mu\in[0,\xi]$ analogiczny podział ma postać

$$[0,\xi]_{\mathbf{I}} = [0,\mu]_{\mathbf{I}} \cup (\mu,\xi]_{\mathbf{I}} \cup \{\rho\in[0,\xi]_{\mathbf{I}} \ :\ \rho\not\sim\mu\},$$

w której pojawia się dodatkowa część $\{\rho\in[0,\xi]_{\mathbf{I}} \ :\ \rho\not\sim\mu\}$ związana z nieporównywalnością elementów. Tą częścią zajmowaliśmy się w [OWys20, Lemma 6.4] i wymagało to osobnych technik i dowodów dla każdej klasy rozpatrywanych symetrycznych stożków dodatnich.

4.7. **Relacje Q-komutacji, artykuły** [BLWys12, BLWys17]**.**

4.7.1. *artykuł* [BLWys12]. W artykule [BLWys12], wspólnym z Markiem Bożejko i Eugene Lytvynovem, badaliśmy uogólnione relacje Q-komutacji, wprowadzone przez Antonio Liguori and Mihaila Mintcheva [48] w następującej postaci

$$\begin{aligned}
\partial_s\partial_t^\dagger &= Q(s,t)\partial_t^\dagger\partial_s + \delta(s,t),\\
\partial_s\partial_t &= Q(t,s)\partial_t\partial_s,\\
\partial_s^\dagger\partial_t^\dagger &= Q(t,s)\partial_t^\dagger\partial_s^\dagger.
\end{aligned}$$

Rozpatrywana Q-funkcja jest następująca. Na lokalnie zwartej przestrzeni Polskiej T z zadaną miarą Radona σ (bez atomową) rozpatrujemy przekątną $D := \{(t,t)\in T^2 \ :\ t\in t\}$ oraz podzbiór $D\subset A\subset T^2$ zawierający przekątną, który jest symetryczny (czyli $(s,t)\in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(t,s)\in A$) i który ma miarę zero $\sigma^{\otimes 2}(A)=0$. Zbiór $T^{(2)} := T^2\setminus A$ jest także symetryczny i rozpatrujemy jądro $Q : T^{(2)}\mapsto\mathbb{C}$ spełniające $|Q(s,t)|=1$ i $Q(s,t)=\overline{Q(t,s)}$, określone prawie wszędzie na T^2.

Przykład, który jest motywacją tych badań, pochodzi z fizyki i dotyczy anyonów. W ich przypadku, dla ustalonego $q\in\mathbb{C}$ o module jeden $|q|=1$, i dla $T=\mathbb{R}$ (lub $T=\mathbb{R}_+$) oraz dla $A=D$ określamy

$$Q(s,t) = \begin{cases} q & \text{jeśli} \quad s<t \\ \bar{q} & \text{jeśli} \quad s>t \end{cases}$$

Można uogólnić ten przykład na $T=\mathbb{R}^d$ z $A := \{(s,t)\in T^2 \ :\ s_1=t_1\}$, jeśli $s := (s_1,\dots,s_d), t := (t_1,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^d$, gdy porządek zadany jest jako

$$s<t \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad s_1<t_1, \quad s,t\in T^{(2)}.$$

Odpowiada to statystyce anyonowej gdy $d=2$.

Dalej zdefiniowaliśmy Q-zdeformowaną przestrzeń Focka, deformując symetryczną przestrzeń Focka operatorem Q-symetryzacji. Jego konstrukcja jest następująca. Dla mierzalnej funkcji $f^{(2)} : T^{(2)}\mapsto\mathbb{C}$ określamy działanie operatora Ψ wzorem

$$(\Psi f^{(2)})(s,t) := Q(s,t)f^{(2)}(t,s), \quad (s,t)\in T^{(2)}.$$

W szczególności funkcja Q-symetryczna spełnia $\Psi f^{(2)} = f^{(2)}$. Dla $n \geq 2$ określamy

$$T^{(n)} := \{(t_1, \ldots, t_d) \in T^n : \ \forall\, 1 \leq i < j \leq n \ (t_i, t_j) \notin A\},$$

i rozszerzamy operator Ψ na funkcje mierzalne na n zmiennych $f^{(n)} : T^{(n)} \mapsto \mathbb{C}$ wzorem

$$(\Psi_j f^{(n)})(t_1, \ldots, t_d) := Q(t_j, t_{j+1}) f^{(n)}(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, t_j, t_{j+2} \ldots, t_d), \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Rodzina operator operatorów $\{\Psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ spełnia równania Yanga-Baxtera.

Proposition. [BLWys12, Proposition 2.3] *Operatory $\{\Psi_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ spełniają równania*

$$\begin{aligned} \Psi_j^2 &= Id, \quad \textit{identyczność}, \\ \Psi_i \Psi_j &= \Psi_j \Psi_i, \quad \textit{jeśli} \quad |i - j| \geq 2, \\ \Psi_j \Psi_{j+1} \Psi_j &= \Psi_{j+1} \Psi_j \Psi_{j+1}. \end{aligned}$$

Dlatego można te operatory zdefiniować także dla indeksów będących permutacjami. Mianowicie, jeśli $\pi_j = (j, j+1) \in S_n$, dla $n \geq j+1$, oznacza transpozycję $j \leftrightarrow j+1$, to wówczas każdą permutację $\pi \in S_n$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ można (niejednoznacznie) przedstawić jako iloczyn (minimalnej ilości) transpozycji $\pi = \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_k}$, przy czym liczba k nie zależy od takiego minimalnego przedstawienia. Dla takiego przedstawienia permutacji $\pi \in S_n$ określamy

$$\Psi_\pi := \Psi_{j_1} \ldots \Psi_{j_k},$$

przy czym równania Yanga-Baxtera gwarantują, że to określenie nie zależy od przedstawienia $\pi = \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_k}$ jako iloczynu k transpozycji (dla minimalnego k).

Dla $n \geq 2$ rozpatrywaliśmy działamnie tych operatorów Ψ_π na przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n} := L^2(T^n, \sigma^{\otimes n})$, gdzie $\mathcal{H}_\mathbb{C} := \{L^2(T, \sigma)\}$ jest przestrzenią zespolonych funkcji całkowalnych z kwadratem. Wóczas z warunku $|Q(s,t)| = 1$ wynika, że odwzorowanie $S_n \ni \pi \mapsto \Psi_\pi$ jest reprezentacją unitarną grupy permutacji S_n na przestrzeni Hilberta $(\mathcal{H}_\mathbb{C})^{\otimes n}$, ponieważ $\Psi_\pi \Psi_\rho = \Psi_{\pi\rho}$ dla każdych $\pi, \rho \in S_n$. Pozwala to zdefiniować operatory Q-symetryzacji

$$P_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \Psi_\pi, \quad n \geq 2.$$

Proposition. [BLWys12, Proposition 2.4] *Dla każdego $n \geq 2$ operator $P_n : \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n} \mapsto \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n}$ jest rzutem ortogonalnym: $P_n^* = P_n^2 = P_n$ oraz dla $1 \leq k \leq n-1$ jest*

$$P_n = P_n(P_k \otimes P_{n-k}).$$

Pozwala to dalej zdefiniować Q-symetryczne iloczyny tensorowe jako obrazy projektorów $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\circledast n} := P_n \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n}$. W [BLWys12, Proposition 2.5] udowodniliśmy, że $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{\circledast n} = \{f^{(n)} \in \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n} : \Psi_j f^{(n)} = f^{(n)} \ \forall j = 1, 2, \ldots, n-1\}$. Jawny wzór na działanie operatora symetryzacji P_n podaliśmy w [BLWys12, Proposition 2.8], dla $f^{(n)} \in \mathcal{H}_\mathbb{C}^{\otimes n}$ i $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (P_n f^{(n)})(t_1, \ldots, t_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} Q_\pi(t_1, \ldots, t_n) f^{(n)}(t_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, t_{\pi^{-1}(n)}) \\ Q_\pi(t_1, \ldots, t_n) &:= \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \pi(i) > \pi(j)}} Q(t_i, t_j), \quad \text{for} \quad \pi \in S_n \\ (f_1 \circledast \ldots \circledast f_n)(t_1, \ldots, t_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} Q_\pi(t_1, \ldots, t_n) f_1(t_{\pi(1)}) \cdot \cdots \cdot f_n(t_{\pi(n)}). \end{aligned}$$

Wynika z tego *prawo zakazu dla anyonów* [BLWys12, Proposition 2.9], które mówi, że jeśli $q^N = 1$ jest pierwiastkiem z jedynki, to $f^{\circledast N} = 0$ dla dowolnej $f \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$.

Q-zdeformowana przestrzeń Focka jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{F}^Q(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} n! \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\circledast n},$$

gdzie czynnik $n!$ mnoży iloczyn skalarny. Podstawowe operatory są określona dla każdego $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, na podprzestrzeni $\mathcal{F}_{fin}^Q(\mathcal{H})$ elementów z $\mathcal{F}^Q(\mathcal{H})$ postaci $F = (f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}, 0, 0, 0, \dots)$:

$$\begin{aligned} a^+(h) f^{(n)} &:= h \circledast f^{(n)}, \quad f^{(n)} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\circledast n} \quad \text{(operator kreacji)} \\ a^-(h) &:= (a^+(h))^* \restriction_{\mathcal{F}_{fin}^Q(\mathcal{H})}, \quad \text{(operator anihilacji).} \end{aligned}$$

Jawne wzory na działanie operatorów anihilacji podaliśmy w [BLWys12, Propositions 3.1, 3.2].

Jedną z głównych idei pracy [BLWys12] było zbudowanie modelu matematycznego dla operatorów *kreacji i anihilacji w punkcie*: $\partial_t^\dagger = a^+(\delta_t)$, $\partial_t = a^-(\delta_t)$, dla miary atomowej Diraca δ_t w punkcie $t \in T$, które by spełniały warunki

$$\partial_t^\dagger f^{(n)} = \partial_t^\dagger \circledast f^{(n)}, \quad \partial_t f^{(n)} = n f^{(n)}(t, \cdot).$$

Formalnie mogliśmy zapisać wzory

$$\begin{aligned} a^+(h) &= \int_T h(t) \partial_t^\dagger \, \sigma(dt), \quad \text{(kreator)} \\ a^-(h) &= \int_T \overline{h(t)} \partial_t^\dagger \, \sigma(dt), \quad \text{(anihilator)} \\ a^0(h) &= \int_T h(s) \partial_s^\dagger \partial_s \, \sigma(ds), \quad \text{(operator neutralny).} \end{aligned}$$

Wzory te mają sens poprzez formy kwadratowe, które powstają poprzez iloczyny skalarne z funkcjami testowymi, na przykład

$$\begin{aligned} &\langle a^0(h) f^{(n)}, g^{(n)} \rangle_{\mathcal{F}^Q(\mathcal{H})} = \int_T h(s) \langle \partial_s f^{(n)}, \partial_s g^{(n)} \rangle_{\mathcal{F}^Q(\mathcal{H})} \, \sigma(ds) \\ &= (n-1)! n^2 \int_T h(s) \left(\int_{T^{n-1}} f^{(n)}(s, t_1, \dots, t_{n-1}) \overline{g^{(n)}(s, t_1, \dots, t_{n-1})} \sigma(dt_1) \dots \sigma(dt_{n-1}) \right) \sigma(ds) \\ &= n! n \int_{T^n} h(t_1) f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) \overline{g^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)} \sigma(dt_1) \dots \sigma(dt_n). \end{aligned}$$

W szczególności pokazaliśmy w [BLWys12, (3.11)], że

$$(a^0(h) f^{(n)})(t_1, \dots, t_n) = (h(t_1) + \dots + h(t_n)) f^{(n)}(t_1, \dots, t_n).$$

Przy takim modelu mamy następującą własność.

Proposition. [BLWys12, Proposition 3.8] *Operatory kreacji i anihilacji spełniają następujące relacje Q-komutacji:*

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_t^\dagger &= Q(s,t) \partial_t^\dagger \partial_s + \delta(s,t), \\ \partial_s \partial_t &= Q(t,s) \partial_t \partial_s, \\ \partial_s^\dagger \partial_t^\dagger &= Q(t,s) \partial_t^\dagger \partial_s^\dagger, \end{aligned}$$

które mają sens jako formy kwadratowe dla iloczynów skalarnych z funkcjami testowymi. W szczególności symbol $\delta(s,t)$ ma następujący sens:

$$\int_{T^2} f^{(2)}(s,t) \delta(s,t) \, \sigma(ds) \sigma(dt) := \int_T f^{(2)}(t,t) \, \sigma(dt).$$

W[BLWys12, Section 4] zdefiniowaliśmy Q-analogi procesów Gaussa i Poissona. Mianowicie, dla ustalonego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz zbioru $B_0(T)$ rzeczywistych borelowskich funkcji mierzalnych, określamy zespoloną $*$-algebrę z jedynką $\mathcal{P}$, generowaną przez wszystkie operatory $\{\langle f, \omega\rangle : f \in B_0(T)\}$, gdzie

$$\omega_\lambda(f) = \langle f, \omega\rangle := a^+(f) + \lambda \cdot a^0(f) + a^-(f).$$

Przypadek $\lambda = 0$ odpowiada procesom Gaussowskim a przypadek $\lambda = 1$ (scentrowanemu) procesowi Poissona. Operatory te są istotnie samosprzężone na $\mathcal{F}^Q_{fin}(\mathcal{H})$.

Elementy algebry $\mathcal{P}$ są nieprzemiennymi wielomianami nieprzemiennych zmiennych $\langle f, \omega\rangle$, które działają jako operatory liniowe na $\mathcal{F}^Q_{fin}(\mathcal{H})$. Przy pomocy stanu próżniowego τ na $\mathcal{F}^Q(\mathcal{H})$ określamy iloczyn skalarny $\langle p_1, p_2\rangle := \tau(p_2^* p_1)$, a następnie przestrzeń Hilberta $L^2(\tau)$ jako uzupełnienie przestrzeni ilorazowej $\mathcal{P}/\mathcal{P}_0$, gdzie $\mathcal{P}_0 := \{p \in \mathcal{P} : \ \tau(p^*p) = 0\}$. Wówczas odwzorowanie $I : \mathcal{P}/\mathcal{P}_0 \ni p \mapsto p\Omega \in \mathcal{F}^Q(\mathcal{H})$ rozszerza się do operatora unitarnego $I : L^2(\tau) \mapsto \mathcal{F}^Q(\mathcal{H})$. Używając notacji

$$\langle f^{(n)}, : \omega^{\otimes} :\rangle := I^{-1} P_n f^{(n)} = \int_{T^n} f^{(n)} : \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) : \sigma(dt_1) \ldots \sigma(dt_)$$

pokazaliśmy następującą rekurencję:

Proposition. [BLWys12, Proposition 4.3] $: \omega(t) := \omega(t)$ *oraz*

$$\begin{aligned} : \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) : \ &= \ \omega(t_1) : \omega(t_2) \ldots \omega(t_n) : - \lambda \sum_{i=2}^{n} \delta(t_1, t_i) : \omega(t_2) \ldots \omega(t_n) : \\ &- \ \lambda \sum_{i=2}^{n} \delta(t_1, t_i) Q(t_1, t_2) Q(t_1, t_3) \ldots Q(t_1, t_{i-1}) : \omega(t_2) \ldots \check{\omega}(t_i) \ldots \omega(t_n) : \end{aligned}$$

W tym kontekście pojawia się naturalne pytanie o relację pomiędzy wielomianami $: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :$ a Q-porządkiem Wicka $: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :_W$, który określa się jako wykonanie wszystkich możliwych Q-komutacji $\partial_s \partial_t^\dagger \mapsto Q(s,t) \partial_t^\dagger \partial_s$ tak, aby wszystkie operatory kreacji znalazły się na lewo od wszystkich operatorów anihilacji. Pokazaliśmy, że w przeciwienstwie do przypadku bozonowego (symetrycznej przestrzeni Focka), w naszym przypadku sytuacja jest bardziej złożona. Ogólnie, dla $\lambda \neq 0$ równość $: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :=: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :_W$ zachodzi tylko gdy $Q \equiv 1$. Dla $\lambda = 0$ uzyskaliśmy następujący wynik.

Twierdzenie. [BLWys12, Theorem 4.5] *Jeśli* $Q(s,t) = \pm 1$ *dla wszystkich* $(s,t) \in T^{(2)}$*, wówczas w przypadku* Q*-Gaussowskim* $\lambda = 0$ *zachodzi równość* $: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :=: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :_W$.

Wyznaczyliśmy także zasadę Wicka dla produktów pól.

Twierdzenie. [BLWys12, Theorem 4.7]

$$\omega(t_1) \ldots \omega(t_n) = \sum_{V \in \mathcal{P}^{(n)}_{\pm}} Q(V; t_1, \ldots, t_n) : \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :_V$$

przy czym sumowanie jest po wszystkich partycjach zbioru $\{1, \ldots, n\}$*, których bloki są oznaczone liczbami* -1 *lub* 1*, a* $Q(V; t_1, \ldots, t_n)$ *jest dana wzorem* [BLWys12, (4.11)]*, natomiast znaczenie symbolu* $: \omega(t_1) \ldots \omega(t_n) :_V$ *jest objaśnione przy opisie przykładu* [BLWys12, Example 4.6].

Uzyskaliśmy też wzór na momenty $\tau(\langle f^{(n)}, \omega^{\otimes n}\rangle)$ [BLWys12, Corollary 4.8] i pokazaliśmy, że stan τ jest śladowy na $\mathcal{P}$ w dwóch przypadkach: $\lambda \neq 0$ i $Q \equiv 1$ lub $\lambda = 0$ i $Q(s,t) = \pm 1$ dla wszystkich (s,t) [BLWys12, Corollary 4.9].

W [BLWys12, Section 5] zdefiniowaliśmy nowe pojęcie Q-kumulant i Q-niezależności. W tym celu rozważaliśmy rodzinę $\{\langle f,\xi\rangle : f\in B_0(T)\}$ symetrycznych operatorów liniowych na podprzestrzeni $\mathcal{D}$ zadanej przestrzeni Hilberta $\mathcal{K}$, które spełniają warunki

$$\begin{aligned} B_0(T)\ni f &\mapsto \langle f,\xi\rangle \quad \text{liniowe},\\ \langle f,\xi\rangle &= 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f=0 \quad \text{p.w.} \end{aligned}$$

Zakładaliśmy także, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ istnieje zespolona miara Radona m_n na T^n, dla której momenty mieszane są dane jako całki

$$\tau(\langle f_1,\xi\rangle\dots\langle f_n,\xi\rangle)=\int_{T^n} f_1(t_1)\dots f_n(t_n)\; m_n(dt_1\times\dots\times dt_n),\quad f_1,\dots,f_n\in B_0(T).$$

Wówczas zdefiniowaliśmy Q-kumulanty w następujący sposób.

Definicja. [BLWys12, Definition 5.2] *n-ta* ***miara Q-kumulantowa*** *dla rodziny $\{\langle f,\xi\rangle : f\in B_0(T)\}$ jest to zespolona miara Radona c_n, określona na borelowskich podzbiorach T^n, zadana w następujący sposób rekurencyjny: $c_1(dt)=m_1(dt)$ oraz*

$$m_n(dt_1\times\dots\times dt_n)=\sum_{V\in\mathcal{P}^{(n)}} Q(V;t_1,\dots,t_n)\prod_{B\in V} c_{|B|}(dt_B),\quad \textit{for}\quad n\ge 2,$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich partycjach $V\in\mathcal{P}^{(n)}$, a dla bloku $B=\{i_1,\dots,i_j\}\in V$ określamy $c_{|B|}(dt_B):=c_k(dt_{i_1}\times\dots\times dt_{i_k})$. Dla $f_1,\dots,f_n\in B_0(T)$ definiujemy n-tą ***Q-kumulantę*** *operatora $\langle f_1,\xi\rangle,\dots,\langle f_n,\xi\rangle$ jako*

$$C_n(\langle f_1,\xi\rangle\dots\langle f_n,\xi\rangle):=\int_{T^n} f_1(t_1)\dots f_n(t_n)\; c_n(dt_1\times\dots\times dt_n)$$

W szczególności, dla rodziny $\{\langle f,\omega\rangle : f\in B_0(T)\}$ pól Gaussowskich/Poissonowskich, miary Q-kumulantowe zadane są wzorami $c_1(dt)=0$ oraz

$$c_n(dt_1\times\dots\times dt_n)=\lambda^{n-2}\,\delta(dt_1\times\dots\times dt_n),$$

natomiast Q-kumulanty są dane wzorami

$$C_n(\langle f_{j_1},\omega\rangle\dots\langle f_{j_k},\omega\rangle):=\lambda^{n-2}\int_T f_{j_1}(t)\dots f_{j_k}(t)\;\sigma(dt),\quad j_1,\dots j_k\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Jako przykład pokazaliśmy, że jeśli $f_if_j=0$ (p.w.) dla wszystkich $1\le i<j\le n$, to operatory $\langle f_1,\omega\rangle,\dots,\langle f_n,\omega\rangle$ są Q-niezależne.

Pojęcie Q-niezależności pozwoliło nam zdefiniować w [BLWys12, Section 6] Q-procesy Lévy'ego, które są procesami stacjonarnymi o przyrostach Q-niezależnych.

Definicja. [BLWys12, Definition 6.1] *Rodzinę operatorów $\{\langle f,\xi\rangle : f\in B_0(T)\}$ nazywamy* ***Q-procesem Lévy'ego*** *jeśli spełnia następujące warunki:*

(*i*) ***Q-NIEZALEŻNOŚĆ PRZYROSTÓW.*** *Dla dowolnych mierzalnych parami rozłącznych podzbiorów $\Delta_1,\dots,\Delta_n\subset T$, operatory $\langle\chi_{\Delta_1},\xi\rangle,\dots,\langle\chi_{\Delta_n},\xi\rangle$ są $Q-$niezależne.*

(*ii*) ***STACJONARNOŚĆ.*** *Dla dowolnych podzbiorów mierzalnych $\Delta_1,\Delta_2\subset T$, takich, że $\sigma(\Delta_1)=\sigma(\Delta_2)$, jest*

$$\tau(\langle\chi_{\Delta_1},\xi\rangle^n)=\tau(\langle\chi_{\Delta_2},\xi\rangle^n),\quad \textit{dla wszystkich}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Przykładem Q-procesu Lévy'ego jest pole operatorowe $\{\omega_\lambda(f)=\langle f,\omega\rangle : f\in B_0(T)\}$, dla dowolnego parametru $\lambda\in\mathbb{R}$. Większośćwłasności tych operatorów przenosi się na przypadek ogólny $\{\langle f,\xi\rangle : f\in B_0(T)\}$, przy odpowiednim doborze miary Q-Lévy'ego ν, gdzie

$$\langle f,\xi\rangle := a^+(f\otimes 1)+a^0(f\otimes x)+a^-(f\otimes 1)$$

działa na $\widetilde{Q}$-przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{\widetilde{Q}}(\mathcal{K})$, skonstruowanej na przestrzeni Hilberta $\mathcal{K} := L^2(T,\sigma) \otimes L^2(\mathbb{R},\nu)$ dla $Q-$funkcji rozszerzonej na produkt kartezjański $T^{(2)} \times \mathbb{R}^2$ wzorem

$$\widetilde{Q}(t_1, x_1, t_2, x_2) := Q(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in T^{(2)}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Operatory $\langle f, \xi\rangle$ są istotnie samosprzężone (na odpowiedniej dziedzinie). Pokazaliśmy wzory na miary Q-kumulantowe [BLWys12, Proposition 6.4]: $c_1(dt) = 0$ oraz

$$c_n(dt_1 \times \cdots \times dt_n) = \left(\int_{\mathbb{R}} x^{n-2}\nu(dx)\right) \delta(dt_1 \times \cdots \times dt_n), \quad n \geq 2.$$

Udowodniliśmy też [BLWys12, Proposition 6.6], że Q-procesy Lévy'ego mają własność *niezależności piramidalnej*, wprowadzonej przez Burkhard Kümmerer [47].

W końcowej części artykułu [BLWys12] udowodniliśmy analog chaotycznego rozkładu typu Nualarta-Schoutensa dla Q-procesów Lévy'ego: dla dowolnego Q-procesu Lévy'ego dowolny element przestrzeni $L^2(\nu)$ może być przedstawiony jako szereg nieprzemiennych całek stochastycznych [BLWys12, Theorem 7.2].

4.7.2. *artykuł* [BLWys17]. W artykule [BLWys17], wspólnym z Markiem Bożejko i Eugene Lytvynovem, kontynuowaliśmy badania relacji Q-komutacji jądra hermitowskiego $Q(t,s) = \overline{Q(s,t)}$ w ogólniejszym przypadku $|Q(s,t)| \leq 1$. Przy takich założeniach badaliśmy reprezentacjie, na (Q-zdeformowanej) przestrzeni Focka, Q-zdeformowanych relacji komutacji

$$\partial_s \partial_t^\dagger = Q(s,t)\partial_t^\dagger \partial_s + \delta(s,t), \quad s,t \in T. \tag{4}$$

Operatory $\partial_t^\dagger$, ∂_s są realizowane jako kreatory i anihiliatory na Q-zdeformowanej przestrzeni Focka, i spełniają dodatkowe relacje komutacji (podobne do przypadku anyonowego, ale nie takie same):

$$\partial_s^\dagger \partial_t^\dagger = Q(t,s)\partial_t^\dagger \partial_s^\dagger, \quad \text{jeśli} \quad |Q(s,t)| = 1, \tag{5}$$

$$\partial_s \partial_t = Q(t,s)\partial_t \partial_s, \quad \text{jeśli} \quad |Q(s,t)| = 1. \tag{6}$$

W naszej konstrukcji funkcje Q-quasi symetryczne spełniają warunki

$$f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = Q(t_j, t_{j+1}) f^{(n)}(t_1, \ldots t_{j+1}, t_j \ldots, t_n), \quad \text{if} \quad |Q(t_j, t_{j+1})| = 1,$$

dla wszystkich $1 \leq j \leq n-1$. Jednakże, w przeciwieństwie do przypadku anyonowego (czyli dla $|Q(s,t)| = 1$), odwzorowanie

$$S_n \ni \pi \longmapsto \Psi_\pi$$

nie jest reprezentacją unitarną grupy permutacji, a operatory

$$P_n := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \Psi_\pi$$

są jedynie samosprzężonymi dodatnimi kontrakcjami [BLWys17, Theorem 4]. Jądra takich operatorów zostały opisane przez Palle Jørgensena, Daniila Proskurina and Yurija Samoilenko in [49]:

$$\ker(P_n) = \overline{\sum_{k=1}^{n-1} \ker(1 + \Psi_k)},$$

my natomiast opisaliśmy ich obrazy.

Twierdzenie. [BLWys17, Theorem 7] *Obraz* $\mathtt{ran}(P_n)$ *operatora* P_n *składa się ze wszyatkich takich funkcji* $f^{(n)} \in \mathcal{H}^{\otimes n}$*, które są* $Q-$*quasi-symetryczne, czyli:*

$$f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = Q(t_j, t_{j+1}) f^{(n)}(t_1, \ldots t_{j+1}, t_j \ldots, t_n),$$

dla wszystkich $1 \leq j \leq n-1$*, oraz* $\sigma^{\otimes n}-$*prawie wszystkich* $(t_1, \ldots, t_n) \in T^{(n)}$ *dla których spełniony jest warunek* $|Q(t_j, t_{j+1})| = 1$ *(dla* $j = 1, \ldots, n-1$*).*

W [BLWys17, Theorem 8] opisaliśmy także rzuty ortogonalne $\mathbb{P}_n : \mathcal{H}^{\otimes n} \mapsto \overline{\mathtt{ran}(P_n)}$. Te projektory mają podobne własności jak w przypadku anyonowym, mianowicie:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{P}_k \otimes \mathbb{P}_{n-k}), \quad \text{dla wszystkich} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Mając zdefiniowane operatory kreacji $\partial_t^\dagger$ i anihilacji ∂_s na Q-zdeformowanej przestrzeni Focka pokazaliśmy, że spełniają one następujące relacje Q-komutacji.

Twierdzenie. [BLWys17, Theorem 14] *Operatory kreacji* $\partial_t^\dagger$ *i operatory anihilacji* ∂_s*, dla* $s, t \in T$*, spełniają relacje komutacji (4), (5) i (6), przy czym ich sens jest dany przez formy kwadratowe jako iloczyny skalarne z funkcjami testowymi:*

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_t^\dagger &= Q(s,t)\partial_t^\dagger \partial_s + \delta(s,t), \quad \textit{oznacza} \\ \int_{T^2} g(s)h(t)\ \partial_s \partial_t^\dagger\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) &= \int_{T^2} g(s)h(t)Q(s,t)\ \partial_t^\dagger \partial_s\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) + \int_T g(t)h(t)\ \sigma(dt), \quad g, h \in \mathcal{H}; \end{aligned}$$

a dla wszystkich $\varphi^{(2)} \in \mathcal{H}^{\otimes 2}$*, które znikają prawie wszędzie na* $\{(s,t) \in T^{(2)} : \ |Q(s,t)| < 1\}$*, jest*

$$\begin{aligned} \partial_s^\dagger \partial_t^\dagger &= Q(t,s)\partial_t^\dagger \partial_s^\dagger, \quad \textit{oznacza} \\ \int_{T^2} \varphi^{(2)}(s,t)\ \partial_s^\dagger \partial_t^\dagger\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) &= \int_{T^2} \varphi^{(2)}(s,t) Q(t,s)\ \partial_t^\dagger \partial_s^\dagger\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) \\ \partial_s \partial_t &= Q(t,s)\partial_t \partial_s, \quad \textit{oznacza} \\ \int_{T^2} \varphi^{(2)}(s,t)\ \partial_s \partial_t\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) &= \int_{T^2} \varphi^{(2)}(s,t) Q(t,s)\ \partial_t \partial_s\ \sigma(ds)\ \sigma(dt), \end{aligned}$$

W szczególności

$$\int_{T^2} g(s)h(t)\ \partial_s^\dagger \partial_t^\dagger\ \sigma(ds)\ \sigma(dt) = a^+(g)a^+(f).$$

Badaliśmy także przypadek przestrzeni dyskretnej T (skończonej lub przeliczalnej). Szczególnie ciekawym okazał się przypadek

$$Q(s,t) = \begin{cases} q & \text{jeśli} \quad s > t, \\ \bar{q} & \text{jeśli} \quad s < t, \\ -1 & \text{jeśli} \quad s = t, \end{cases}$$

dla $|q| = 1$ i $T \subset \mathbb{N}$. W tym przypadku operatory kreacji $\partial_t^\dagger$ i operatory anihilacji ∂_s są ogranicznone z normami równymi 1, i dla $h \in \ell^1(T \to \mathbb{C})$ mamy następujące oszacowanie:

$$\|a^+(h)\| = \|a^-(h)\| \leq \|h\|_1.$$

W tej sytuacji uzyskaliśmy następujący wynik.

Twierdzenie. [BLWys17, Theorem 18 (Anyonowe prawo zakazu)] *Jeśli* $q^m = 1$ *dla pewnego* $m \geq 2$*, to dla dowolnego* $h \in \mathcal{H} = \ell^2(T \mapsto \mathbb{C})$ *jest*

$$a^+(h)^m = a^-(h)^m = 0.$$

4.8. **Perturbacje operatorów, artykuł** [KWWys17]**.** W artykule [KWWys17], wspólnym z Anną Kulą i Micghałem Wojtylakiem badaliśmy własności perturbacji rzędu dwa (domkniętych, gęsto określonych) operatorów na przestrzeni Hilberta H.

Motywacją tych badań była próba znalezienia operatorowej wersji t-transformaty miar. Idea takich poszukiwań jest następująca. Jeśli $A = A^*$ jest (ograniczonym) operatorem hermitowskim na przestrzeni Hilberta H, a $\varphi_u(A) = \langle u, Au\rangle$ jest stanem (wektorowym) dla $u \in H$, $\|u\| = 1$, to można zdefiniować rozkład operatora A względem stany φ_u jako miarę probabilistyczną $\mu = \mu_{A,u}$, której momenty są momentami operatora:

$$\varphi_u(A^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, \mu(dx), \quad \text{for all} \quad n \geq 0.$$

W przypadku operatora ograniczonego ciąg jego momentów jest podgeometryczny, zatem miara ma nośnik zwarty $\operatorname{supp}(\mu) \subset [-\|A\|, \|A\|]$ i dlatego μ jest wyznaczona jednoznacznie przez ciąg momentów. Miarę μ można poddać t-transformacji $\mu \mapsto \mu_t$ i rozaważaliśmy pytanie czy istnieje taka transformacja $\mathbf{U}_t : A \mapsto A_t$, dla której rozkładem operatora A_t względem tego samego stanu φ jest miara μ_t. Tą ideę można pokazać na diagramie:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_u} & \mu \\ \mathbf{U}_t \big\downarrow & & \big\downarrow \mathcal{U}_t \\ A_t & \xrightarrow{\varphi_u} & \mu_t \end{array}$$

Częściową motywacją dla naszych badań były także wyniki i konstrukcja d-deformacji z pracy [Wys05a].

Podstawowym obiektem naszych badań była następująca perturbacja rzędu dwa:

$$A \longmapsto A_{s,t} := A - s(u \otimes w) - t(g \otimes h), \quad s, t \in \mathbb{C}, \quad u, w, g, h \in H,$$

gdzie $(u \otimes w)(f) := \langle f, w\rangle u$ oznacza operator rzędu jeden (rzut na u). Udowodniliśmy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie. [KWWys17, Theorem 2] *Niech A będzie domkniętym gęsto określonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta H i niech $Q_{u,w}(z) := \langle (z - A)^{-1} u, w\rangle$ będzie funkcją Weyla operatora A, określoną dla $z \in \rho(A)$ w rezolwencie $\rho(A)$ operatora A. Niech $\sigma(A)$ oznacza spektrum A, wówczas dla $u \in \mathtt{dom}(A)$ i dowolnych $w, g, h \in H$, zachodzi:*

(*i*) *jeśli $z \in \rho(A) \cap \rho(A_{s,0})$ to wówczas $z \in \sigma(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$1 + sQ_{u,w}(z) + tQ_{g,h}(z) + stQ_{u,w}(z)Q_{g,h}(z) - stQ_{g,w}(z)Q_{u,h}(z) = 0.$$

(*ii*) *Funkcja Weyla $Q_u^{s,t}(z) := \langle (z - A_{s,t})^{-1} u, u\rangle$ perturbacji operatora jest dana przez funkcję Weyla operatora A wzorem*

$$Q_u^{s,t} = \frac{Q_{u,u} + tQ_{u,u}Q_{g,h} - tQ_{u,h}Q_{g,u}}{1 + aQ_{u,w} + tQ_{g,h} + stQ_{g,h}Q_{u,w} - stQ_{g,w}Q_{u,h}}.$$

Następnie, dla przypadku $\{u, w\} = \{g, h\}$ badaliśmy dwie szczególne perturbacje

$$\begin{aligned} \widetilde{A_{s,t}} &:= A - s(u \otimes w) - t(w \otimes u) \\ \widehat{A_{s,t}} &:= A - s(u \otimes u) - t(w \otimes w). \end{aligned}$$

W [KWWys17, Corollary 3] pokazaliśmy szczególną postać Theorem 2 w tych dwóch przypadkach.

Następnie założyliśmy że $w = Au$ i udowdoniliśmy następującą postać Theorem 2 dla transformacji *hat* i *tilde.*

Twierdzenie. [KWWys17, Theorem 5] *Niech A będzie domkniętym gęsto określonym operatorem na przestrzeni Hilberta H i niech $u \in \mathtt{dom}(A)$, $\|u\| = 1$ oraz $m = \langle u, Au \rangle$. Wówczas, przy oznaczeniach $Q_h = \langle (z-A)^{-1}h, h\rangle$ dla $h \in H$ mamy następujące własności.*

(1) *Dla operatora $\widetilde{A_{s,t}} := A - s(u \otimes Au) - t(Au \otimes u)$ gdzie $s, t \in \mathbb{C}$, jest:*
  (1.1) *jeśli $z \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A_{s,0}})$ to $z \in \sigma(\widetilde{A_{s,t}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1-t)\left[1 + \frac{s}{z}(m + Q_{Au})\right] + t(z + sm)Q_u(z) = 0$$

  (2.2) *Funkcja Weyla $\widetilde{Q_u^{s,t}} := \langle (z - \widetilde{A_{s,t}})^{-1}u, u\rangle$ dana jest wzorem*

$$\frac{1}{\widetilde{Q_u^{s,t}}(z)} = \frac{1-t}{Q_u}\left(1 + \frac{s}{z}(m + Q_{Au}(z))\right) + t(z + sm)$$

(2) *Dla operatora $\widehat{A_{s,t}} = A - s(u \otimes u) - t(Au \otimes Au)$ gdzie $s, t \in \mathbb{C}$, jest:*
  (2.1) *jeśli $z \in \rho(A) \cap \rho(A_{s,0})$ to $z \in \sigma(\widehat{A_{s,t}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(z + stm) + sz(1 - tm)Q_u + t(z + s)Q_{Au} = 0.$$

  (2.2) *Funkcja Weyla $\widehat{Q_u^{s,t}} := \langle (z - \widehat{A_{s,t}})^{-1}u, u\rangle$ jest dana wzorem*

$$\frac{1}{\widehat{Q_u^{s,t}}} = s + \frac{1 + tQ_{Au}}{(1 - tm)Q_u(z) + \frac{t}{z}(m + Q_{Au})}$$

W przypadku operatora samosprzężonego $A = A^*$ otrzymaliśy uproszczony wzór [KWWys17, Lemma 6]

$$Q_{Au}(z) = z^2 Q_u(z) - z - m,$$

z którego wybika następująca charakteryzacja.

Twierdzenie. [KWWys17, Theorem 7] *Niech $A = A^*$ będzie samosprzężonym domkniętym gęsto określonym operatorem na przestrzeni Hilberta H i niech $u \in \mathtt{dom}(A)$, $\|u\| = 1$ oraz $m = \langle u, Au\rangle$. Ponadto niech $Q_u = \langle (z-A)^{-1}u, u\rangle$ będzie funkcją Weyla dla A względem u.*

(1) *Dla operatora $\widetilde{A_{s,t}} := A - s(u \otimes Au) - t(Au \otimes u)$ gdzie $s, t \in \mathbb{C}$, jest:*
  (1.1) *jeśli $z \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A_{s,0}})$ to $z \in \sigma(\widetilde{A_{s,t}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1-s)(1-t) + [z(s - st + t) + stm]Q_u(z) = 0$$

  (2.2) *Funkcja Weyla $\widetilde{Q_u^{s,t}} := \langle (z - \widetilde{A_{s,t}})^{-1}u, u\rangle$ jest dana wzorem*

$$\frac{1}{\widetilde{Q_u^{s,t}}(z)} = \frac{(1-s)(1-t)}{Q_u} + z(s - st + t) + stm.$$

(2) *Dla operatora $\widehat{A_{s,t}} = A - s(u \otimes u) - t(Au \otimes Au)$ gdzie $s, t \in \mathbb{C}$, jest:*
  (2.1) *jeśli $z \in \rho(A) \cap \rho(\widehat{A_{s,0}})$ to $z \in \sigma(\widehat{A_{s,t}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1 - st - tzitm) + (s - stm + stz + tz^2)Q_u = 0.$$

  (2.2) *Funkcja Weyla $\widehat{Q_u^{s,t}} := \langle (z - \widehat{A_{s,t}})^{-1}u, u\rangle$ jest dana wzorem*

$$\frac{1}{\widehat{Q_u^{s,t}}} = s + \frac{1 + t(z^2 Q_u(z) - m - z)}{(1 - tm + tz)Q_u(z) - t}$$

Anna Krystek and Hiroaki Yoshida, w pracy [38], zdefiniowali transformatę $\mathcal{U}^{p,q}$ miar probabilistycznych, $p, q \in \mathbb{R}$ oraz $q \geq 0$, przy założeniu istnienia pierwszego momentu ($m = \int x\ \mu(dx)$). Transformata jest określona poprzez następującą równość odwrotności transformat Cauchy'ego

$$\frac{1}{G_{\mathcal{U}^{p,q}(\mu)}}(z) = \frac{q}{G_\mu(z)} + (1-q)z + (q-p)m,$$

i dla $p = q = t$ daje ona $t-$transformatę. Okazało się, że nasza transformata *tilde* $A \mapsto \widetilde{A_{s,t}} = A - s(u \otimes Au) - t(Au \otimes u)$ ma związek z transformatą $\mathcal{U}^{p,q}$.

Twierdzenie. [KWWys17, Theorem 22] *Niech $A = A^*$ będzie samosprzężonym operatorem na H, i nich μ będzie jego rozkładem względem stanu wektorowego $\varphi_u(B) := \langle u, Bu\rangle$ (dla $B \in B(H)$). Niech $m = \langle u, Au\rangle$ i załóżmy, że $(1-s)(1-t) \geq 0$. Wówczas rozkład perturbacji rzędu dwa $\widetilde{A_{s,t}}$ operatora A, względem φ jest transformatą $\mathcal{U}^{p,q}$ rozkładu μ operatora A, dla $q = (1-s)(1-t)$ i $p = 1-s-t$. Zatem*

$$\mu_{\widetilde{A_{s,t}}} = \mu_{\mathbf{U}^{s,t}(A)} = \mathcal{U}^{1-s-t,(1-s)(1-t)}(\mu)$$

To dało odpowiedź na główne pytanie naszych badań.

Transformacja $A \mapsto \widehat{A_{s,t}} = A - s(u \otimes u) - t(Au \otimes Au)$, dla samosprzężonego A, pozwala zdefiniować nową transformatę miar porbabilistycznych $\mathcal{W}^{s,t} : \mu \mapsto \mathcal{W}^{s,t}(\mu)$ dla $s, t \in \mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{W}^{s,t}(\mu)$ jest rozkładem $\widehat{A_{s,t}}$ a μ jest rozkładem A (względem tego samego stanu). Własności tej transformaty są otwartym problemem badawczym.

Następnie rozważaliśmy związek naszych badań i nieprzemiennej probabilistyki, pokazując, że transformata $\mathcal{U}^{p,q}$ zachowuje klasę *wolnych rozkładów Meixnera.* Natomias nie jest tak w przypadku transformaty $\mathcal{W}^{s,t}$.

Dla rozkładu Wignera, czyli miary w CTRG dla wolnej niezależności, pokazaliśmy jak przekształcają ją transformaty $\mathcal{U}^{p,q}$ i $\mathcal{W}^{s,t}$ ([KWWys17, Example 29]). Skonstruowaliśmy też model macierzy Jacobiego J dla transformat $J \mapsto \widetilde{J}$ i $J \mapsto \widehat{J}$.

Pokazaliśmy także zastosowania naszych badań do macierzy na $\mathbb{C}^n$.

Najpierw, w [KWWys17, Theorem 10], opisaliśmy zachowanie wartości własnych w przypadku najogólniejszej rozważanej perturbacji rzędu dwa $A_{sr,tr} := A - sr(u \otimes w) - tr(g \otimes h)$, przy dodatkowym parametrze $r \to +\infty$. Udowodniliśmy, że w taki przypadku dwie wartości własne macierzy $A_{sr,tr}$ są rozbieżne do nieskończoności, natomiast pozostałe $n-2$ wartości własnych dąży do zer wielomianu $q(z) = \det(z - A) \cdot (Q_{u,w}(z)Q_{g,h}(z) - Q_{g,w}(z)Q_{u,h}(z))$ (który ma stopień $n-2$).

Następnie badaliśmy zagadnienie *przeplatania spektrów* macierzy A i $A_{s,t} := A - s(u \otimes w) - t(g \otimes h)$, czyli kiedy pomiędzy dwoma kolejnymi wartościami własnymi jednej macierzy jest dokładnie jedna wartość własna drugiej macierzy. Pokazaliśmy, że jeśli $A = A^*$ ma tylko jednokrotne wartości własne, to funkcja Weyla dla $\|u\| = 1$ jest postaci

$$Q_u(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k = 1.$$

W takjiej sytuacji znaleźliśmy prosty warunek na własność przeplatania spektrów.

Twierdzenie. [KWWys17, Theorem 17] *Niech $\lambda_{\min}$ i $\lambda_{\max}$ będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną maceirzy A. Załóżmy, że współczynniki c_k funkcji Weyla spełniają warunek $c_k \neq 0$ dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$ oraz że $st \neq s + t$. Wóczas każdy z poniższych dwóch warunków*

$$\frac{stm}{st - s - t} \leq \lambda_{\min}, \quad lub \quad \lambda_{\max} \leq \frac{stm}{st - s - t}$$

pociąga za sobą własność przeplatania spektrów macierzy A i macierzy $A_{s,t} := A - s(u \otimes w) - t(g \otimes h)$. W szczególności, spektrum $\sigma(A_{s,t}) \subset \mathbb{R}$ jest rzeczywiste.

5. Opis pozostałych osiągnięć naukowych lub artystycznych, niewymienionych w pkt. 4.

Moje pozostałe osiągnięcia matematyczne są następujące:

1. charakteryzacja grup dyskretnych z *jednostajną średnią Banacha*
2. konstrukcja jednostajnie ograniczonych reprezentacji produktów wolnych, które nie są unitaryzowalne
3. zdefiniowanie i zbadanie własności *algebr Hecke na drzewach jednorodnych*
4. zdefiniowanie i zbadaniewłasności *sześciennej algebry Hecke* na grupie kwantowej $U_q(2)$
5. zdefiniowanie i zbadanie własności *d-deformacji* na wolnej przestrzeni Focka oraz rozkładów zdeformowanych operatorów Gaussowskich
6. zdefiniowanie i zbadanie własności pojęcia *bf-niezależności* - połączenia niezależności wolnej i boole'owskiej - oraz badania *cf-niezależności* - połączenia niezależności wolnej i klasycznej.
7. zdefiniowanie i zbadanie własności *słabo monotonicznej przestrzeni Focka* i rozkładów różnych klas operatorów na tej przestrzeni
8. udowodnienie centralnych twierdzen granicznych dla bm-niezależnych nieprzemiennych zmiennych losowych indeksowanych pewnymi stożkami *niesymetrycznymi*
9. zdefiniowanie i zbadanie własności *łącznego promienia numerycznego* związanego z operatorami kreacji na boole'owskiej oraz na słabo monotonicznej przestrzeni Focka.

Analogicznie jak poprzedni stosuję oznaczenie $|A|$ na ilość elementów skończonego zbioru A.

5.1. **Jednostajna średniowalność, artykuł** [Wys88].

Pojęcie średniej Banacha na grupie $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych zostało uogólnione na grupy dyskretne i nazwane *full Banach mean value*. Grupy o tej własności zostały nazwane po angielsku *amenable* (ja po polsku nazywam je *średniowalne* lub *grupy ze średnią Banacha*). Z definicji, grupa dyskretna G jest średniowalna jeśli istnieje skończenie addytywna miara probabilistyczna M na G, która jest (lewostronnie) niezmiennicza, to znaczy że dla każdego $A \subset G$ i $x \in G$ jest $M(xA) = M(A)$, gdzie $xA := \{xa : a \in A\}$.

Podane zostały, w szczególności, następujące dwie charakteryzacje istnienia średniej Banacha na grupie dyskretnej G:

(1) **Følner** [1]. Dla dowolnego skończonego podzbioru $A \subset G$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór (Følnera) $F \subset G$ taki, że $|aF \Delta F| < \varepsilon|F|$ (rónoważnie: $|aF \cap F| > \varepsilon|F|$) dla każdego $a \in A$. Tutaj $aF := \{ay : y \in F\}$, Δ oznacza różnicę symetryczną zbiorów a $|F|$ jest ilością elementów.

(2) **Kesten** [2]. For every finitely supported probability measure μ on G the probability $\mu^{(2n)}(e)$ of returning to the identity $e \in G$ after $2n$ steps of a random walk defined by μ on G goes to 1 subexponentially, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\mu^{(2n)}(e)} = 1.$$

Gordon Keller w pracy [7] wprowadził jednostajną wersję warunku Følnera jako taką, dla której model niestandardowy G^* grupy G jest średniowalny. Nazwał grupę dyskretną *jednostajnie średniowalną* (ozn. (UF)) jeśli istnieje taka funkcja $K : \mathbb{N} \times (0,1) \mapsto \mathbb{N}$, że dla dowolnego podzbioru skończonego $A \subset G$ mocy $|A| \leq n$ i dla dowolnego $s \in (0,1)$ isteniej taki zbiór Følnera $F \subset G$. że $|F| \leq K(n,s)$ i $|F \cap aF| > s|F|$ dla każdego $a \in A$ (równoważnie: $|AF| \leq (1+s)|F|$). Także Marek Bożejko [4] badał jednostajną średniowalność pokazując, że wszystkie dyskretne grupy nilpotentne są jednostajnie średniowalne.

W artykule [Wys88] zdefiniowałem *jednostajny warunek Kestena* (UK): mówimy, że grupa dyskretna G spełni (UK) jeśli dla dowolnego skonczonego podzbioru $A \subset G$ i dla funkcji charakterystycznej m tego zbioru, określonej jako

$$m(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

jej potęgi splotowe w elemencie neutralnym $e \in G$

$$m_{2n}(e) := \underbrace{(m * \ldots * m)}_{2n \text{ times}}(e)$$

spełniają warunek zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{m_{2n}(e)} = |A|$$

jednostajnie względem liczby elementów $|A|$ (średniowalność zakłada jedynie zwykłą zbieżność). Udowodniłem równoważność (UF)$\Leftrightarrow$(UK) obu warunnków jednostajnych oraz to, że oba są równoważne średniowalności dowolnej ultrapotęgi $G^\star$ grupy dyskretnej G.

5.2. **Konstrukcja rodziny nieunitaryzowalnych jednostajnie ograniczonych reprezentacji produktów wolnych, artykuł** [Wys93]**.** Jacques Dixmier sformułował w 1950r. problem podobieństwa, zwany *similarity problem*: czy każda jednostajnie ograniczona reprezentacja grupy dyskretnej (czy też lokalnie zwartej) G jest podobna do reprezentacji unitarnej? Dokładniej, jeśli reprezentacja $\pi : G \mapsto B(H)$ na przestrzeni Hilberta H spełnia warunek $\sup_{g\in G} \|\pi(g)\| < \infty$, to czy istnieje taki operator odwracalny (ograniczony) $T \in B(H)$, że reprezentacja σ grupy G, określona wzorem $\sigma(g) := T\pi(g)T^{-1}$, jest unitarna? Dixmier pokazał, że jest to prawdą dla grup średniowalnych, i w związku z tym rozwinięto badania jakie grupy mają tą własność. W latach 1970-tych pokazano, że grupa wolna nie ma tej własności, jednakże pojawiały się przykładowe konstrukcje takich reprezentacji grupy wolnej, które są jednostajnie ogtraniczone ale nie unitaryzowalne.

Mój artykuł [Wys93] poświęcony był konstrukcji rodziny jednostajnie ograniczonych reprezentacji produktu wolnego grup dyskretnych, z których większość nie była unitaryzowalna. W szczególności moja konstrukcja dała nową serię reprezentacji grup wolnych.

Warto dodać, że później, w 1997r. Gilles Pisier [10] udowodnił, że średniowalność jest rónoważna problemowi podobieństwa dla grup.

W artykule [Wys93] podałem konstrukcję rodziny π_z, indeksowanej dyskiem jednostkowym $\{|z| < 1\}$, reprezentacji jednostajnie ograniczonych produktu wolnego $G = *_{j=1}^{N} G_j$, $N \geq 2$ grup dyskretnych ($2 \leq N < \infty$). Udowodniłem w [Wys93, Theorem 11], że te reprezentacje są nieprzywiedlne jeśli wszystkie grupy są nieskończone i że unitarne są tylko dla $z \in (\frac{-1}{N-1}, 1)$. Ponadto, ponieważ funkcje Młotkowskiego

$$\varphi_z(g) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad g = e \\ \frac{(N-1)z+1}{Nz} z^{\|g\|} & \text{if} \quad |g| \geq 1. \end{cases}$$

są współczynnikami tych reprezentacji, uzyskałem wniosek, że te funkcje są dodatnio określone dla $z \in (\frac{-1}{N-1}, 1)$. Dodatkowo, ponieważ te funkcje są blokowo radialne (na grupie wolnej), moje reprezentacje są (prawdopodobnie) nierównoważne z innymi znanymi konstrukcjami.

Okazało się także, że dla $z_N = \frac{-1}{N-1}$ reprezentacja π_{z_N} jest równoważna lewej reprezentacji regularnej, natomiast dla $z_0 = 0$ reprezentacja π_0 jest równoważna reprezentacji quasi-regularnej.

Moja konstrukcja rodziny $\{\pi_z : |z| < 1\}$ opiera się na działaniu produktu wolnego grup dyskretnych na drzewie konstrukcji Jean-Pierre Serre'a. Rozważałem operator działający na podzbiorze V_1 tych wierzchołków, które są warstwami ilorazowymi podgrup. Działanie polega na "odcinaniu ostatniej litery": $\mathbf{P}G_j = 0$ dla $1 \leq j \leq N$ oraz

$$g := g_1 g_2 \dots g_n G_j \overset{\mathbf{P}}{\longmapsto} \overline{g} := g_1 g_2 \dots g_{n-1} G_{j_n}, \quad \text{jeśli} \quad g_n \in G_{j_n} \setminus \{e_{j_n}\}, \quad j_n \neq j.$$

Jeśli $L(g)hG_j := ghG_j$ oznacza (izometryczne) działanie grupy na V_1, to operatory

$$A_z(g) := (I - z\mathbf{P})^{-1} L(g)(I - z\mathbf{P}), \quad g \in G,$$

są dobrze określone na funkcjach o nośniku skończonym w V_1. W tym określeniu używam notacji na szereg Neumanna $(I - z\mathbf{P})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}^k$. Określona tak rodzina posiada następujące własności.

Twierdzenie. [Wys93, Theorem 3] *Dla $|z| < 1$ rodzina $\{A_z : |z| < 1\}$ rozszerza się do jednostajnie ograniczonej rodziny reprezentacji produktu wolnego G na $\ell^2(V_1)$ z normami ograniczonymi przez*

$$\|A_z(g)\| \leq 1 + 2\sqrt{N-1}\frac{|z|}{1 - |z|}, \quad \textit{dla każdego} \quad g \in G.$$

Reprezentacje te są nieprzywiedlne, jeśli grupy G_j są nieskończone (z wyjątkiem przypadków $z = 0$ i $z = \frac{-1}{N-1}$). Następnie zdefiniowałem rodzinę $\{V_z : |z| < 1\}$ ograniczonych operatorów odwracalnych na $\ell^2(V_1)$ i zbadałem reprezentacje $\pi_z(g) := V_z^{-1} A_z(g) V_z$, które okazały się być unitane wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in (\frac{-1}{N-1}, 1)$ ([Wys93, Theorem 11] - jest to główny wynik tej pracy). Ponadto obliczyłem też jednostajne oszacowanie norm $\|\pi_z(g)\|$.

5.3. **Algebra Hecke na drzewach jednorodnych, artykuł** [Wys94]**.** Na zbiorze V_q wierzchołków drzewa jednorodnego $X_q = (E_q, V_q)$ stopnia jednorodności $q \geq 2$ rozważamy następujący ciąg funkcji (dwóch zmiennych) zależnych od odległości `dist` na X_q: dla $n \geq 0$ określamy

$$\chi_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad \mathtt{dist}(x, y) = n \\ 0 & \text{jeśli} \quad \mathtt{dist}(x, y) \neq n. \end{cases}$$

Te funkcje można traktować jako jądra operatorów, określonych (przynajmniej) na przestrzeni $K(V_q)$ funkcji o nośnikach skończonych na V_q wzorami:

$$\chi_n(f)(x) = \sum_{y \in X_q} f(y) = \sum_{\mathtt{dist}(x,y) = n} f(y), \quad x \in V_q,$$

a zatem ich złożenie jest dobrze zdefiniowane i dane jest wzorami:

$$\begin{aligned} \chi_n \circ \chi_0 &= \chi_n = \chi_0 \circ \chi_n, \quad n \geq 0, \\ \chi_1 \circ \chi_1 &= \chi_2 + q\chi_0, \\ \chi_1 \circ \chi_n &= \chi_{n+1} + (q-1)\chi_{n-1}. \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Zatem algebra Hecke $\mathbf{H}(X_q) := \mathtt{alg}\{\chi_n : n \geq 0\}$, generowana przez te jądra, jest przemienna, ma jedynkę χ_0 i jest generowana przez χ_1. Można ją traktować jako analog algerby funkcji radialnych na grupie wolnej, w której zachodzą analogiczne relacje.

Głównym zagadnieniem rozważanym w artykule [Wys94] było zbadanie czy $\mathbf{H}(X_q)$ jest maksymalną abelową podalgebrą (ozn.: *MASA=Maximal Abelian Sub-Algebra*) w zadanej większej algebrze operatorów na drzewie. Dokładnie, jeśli $\mathbf{H}(X_q) \subset \mathcal{A}$ jest rozważana jako podalgebra w algebrze A jąder operatorowych $\varphi(x, y)$ na X_q i jeśli $\mathbf{H}(X_q)' := \{\varphi \in \mathcal{A} : \ \varphi \circ \chi_n = \chi_n \circ \varphi, \ \forall \ n \geq 0\}$ jest jej komutantem, to pytamy czy zawieranie $\mathbf{H}(X_q) \subseteq \mathbf{H}(X_q)'$ jest istotne czy nie; równość oznacza, że $\mathbf{H}(X_q)$ jest MASA w $\mathcal{A}$. A ponieważ $\mathbf{H}(X_q)$ jest generowana przez χ_1, problem ten można przeformułować następująco: czy prawdą jest, że jeśli $\varphi \in \mathcal{A}$ spełnia $\varphi \circ \chi_1 = \chi_1 \circ \varphi$ to $\varphi \in \mathbf{H}(X_q)$?

W artykule [Wys94] rozważałem różne przykłady algebry $\mathcal{A}$, dobierane do tego problemu.

1. $\mathcal{A} = \mathcal{F}(X_q)$, gdzie $\varphi \in \mathcal{F}(X_q)$ jeśli istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi(x, y) = 0$ o ile $\mathtt{dist}(x, y) > m$. Wówczas $\mathcal{F}(X_q)$ jest analogiem funkcji o nośnikach skończonych (w przypadku grup wolnych) i $\mathbf{H}(X) \subset \mathcal{F}(X_q)$. W tym przypadku pokazałem następującą własność.

   Twierdzenie. [Wys94, Theorem 3.1] *Jeśli $q \geq 3$ to $\mathbf{H}(X_q)$ jest MASA w $\mathcal{F}(X_q)$.*

   Dowód jest czysto geometryczny i wykorzystuje pewien trik polegającu na możliwości odwrócenia strzałki łączącej dwa wierzchołki na drzewie, przesuwając ją między kolejnymi wierzchołkami, gdy $q \geq 3$ (w rzeczywistości wystarczy, gdy istnieje chociaż jeden wierzchołek stopnia co najmniej 3)
2. Dla $q = 2$ korzystamy z utożsamienia $X_2 = \mathbb{Z}$ drzewa stopnia 2 i liczb całkowitych. Sytuacja jest odmienna od poprzedniej, gdyż algebra Hecke nie jest MASA.

   W tej sytuacji są dwie naturalne klasy macierzy (nieskończonych) $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$, które komutują z χ_1:
   - macierze Hankela $h_{j,k} := v(j + k)$, których wyrazy zależą tylko od sumy indeksów,
   - macierze Toeplitza $t_{j,k} := u(k - j)$, których wyrazy zależą tylko od różnicy indeksów,

   Niech $\mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$ będzie algebrą wszystkich operatorów ograniczonych jednocześnie na $\ell^1(\mathbb{Z})$ i na $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, z normą
$$\|a\| := \inf\left\{C > 0 : \max\left\{\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{j,k}|, \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a_{j,k}|\right\} \leq C\right\}.$$
   Niech $\mathcal{F}_1(\mathbb{Z})$ oraz $\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$ będą domknięciami odpowiednio $\mathcal{F}_(\mathbb{Z})$ i $\mathbf{H}(\mathbb{Z})$ w $\mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$, i niech $(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}))'$ będzie komutantem algebry $\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$ w $\mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$. Niech $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$ i $\mathcal{T}_1(\mathbb{Z})$ oznaczają podzbiory odpowiednio macierzy Hankela i Toeplitza w $\mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$, wówczas $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{T}_1(\mathbb{Z}) = \{0\}$ i jest następująca charakteryzacja komutanta.

   Twierdzenie. [Wys94, Theorem 4.1] *$\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$ nie jest MASA a komutant $(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}))'$ rozkłada się na sumę porstą*
$$(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}))' = \mathbb{H}_1(\mathbb{Z}) \oplus \mathcal{T}_1(\mathbb{Z}).$$
   W dowodzie najpierw pokazałem, że jeśli $a \in (\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}))'$ to, dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, istnieje granica wzdłuż przekątnej
$$\begin{aligned} v(k) &= \lim_{n\to+\infty} a_{-n,n+k} = \lim_{n\to-\infty} a_{-n,n+k} \\ u(k) &= \lim_{n\to+\infty} a_{n,n+k} = \lim_{n\to-\infty} a_{n,n+k}. \end{aligned}$$
   Nastepnie zdefiniowałem dwie macierze $t_{j,k} := u(k - j)$, $h_{j,k} = v(k + j)$ i pokazałem, że $t \in \mathcal{T}_1(\mathbb{Z})$ jest Toeplitza, $h \in \mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$ jest Hankela i zachodzi rozkład $a = t + h$. Natomiast okazało się, że $\mathcal{T}_1(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$ is MASA.
3. W ogólnym przypadku drzewa jednorodnego X_q stopnia $q \geq 2$ rozważałem $\mathcal{F}_1(X)$ jako domknięcie algebry $\mathcal{F}(X)$ w normie
$$\|\varphi\| := \inf\left\{C > 0 : \max\left\{\sup_x \sum_y |\varphi(x, y)|, \sup_y \sum_x |\varphi(x, y)|\right\} \leq C\right\}.$$
   W przypadku $q = 2$ czyli $X_2 = \mathbb{Z}$ mamy istotne zawieranie $\mathcal{F}_1(\mathbb{Z}) \subsetneq \mathcal{Z}_1(\mathbb{Z})$ (podałem na to przykład) tak więc algebra $\mathcal{F}_1(\mathbb{Z})$ jest istotnie mniejsza.

   W ogólnej sytuacji, dla $q \geq 3$, podalgebra Hecke $\mathcal{M}_1(X) \subset \mathcal{F}_1(X)$ jest MASA.

   Twierdzenie. [Wys94, Theorem 5.2] *Podalgebra Hecke $\mathcal{M}_1(X) \subset \mathcal{F}_1(X)$ jest MASA.*

Dowód opiera się na rozważaniach kombinatorycznych, wykorzystuje się także fakt, iż $\varphi \in \mathcal{F}_1(X)$ jeśli jednocześnie

$$\sup_x \sum_{\substack{y, \\ \mathtt{dist}(x,y) \geq n}} |\varphi(x,y)| \underset{n}{\longrightarrow} 0, \quad \text{and} \quad \sup_y \sum_{\substack{x, \\ \mathtt{dist}(x,y) \geq n}} |\varphi(x,y)| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

5.4. **Sześcienna algebra Hecke związana z grupą kwantową $U_q(2)$, artykuły** [Wys10a, Wys2009a]**.** W pracy [23] Stanisław Lech Woronowicz pokazał, że z grupą kwantową $SU_q(N)$ stowarzyszony jest q-zdeformowana symetria, która na bazie standardowej $\{\varepsilon_j \in \mathbb{C}^N : \ j = 1, \ldots, N\}$, jest dana wzorami

$$\sigma(\varepsilon_a \otimes \varepsilon_b) = \begin{cases} q \cdot \varepsilon_b \otimes \varepsilon_a & \text{jeśli} \quad a < b, \\ \varepsilon_a \otimes \varepsilon_a & \text{jeśli} \quad a = b, \\ q \cdot \varepsilon_b \otimes \varepsilon_a + (1-q^2)\varepsilon_a \otimes \varepsilon_b & \text{jeśli} \quad a > b. \end{cases}$$

Ta q-symetria jest operatorem samosprzężonym i spełnia równania Yanga-Baxtera, i równanie kwadratowe Hecke $\sigma^2 = (1-q^2)\sigma + q^2 I$. Zatem definiuje ona rodzinę q-zdeformowanych algebr Hecke $\{H_{q,n} : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $H_{q,n}$ jest algebrą operatorów splatających n-tą potęgę tensorową ko-reprezentacji fundamentalnej grupy kwantowej $SU_q(2)$.

Dla grupy kwantowej $U_q(2)$, której konstrukcję podałem w pracy [Wys04], skonstruowałem analogiczny operator α, dany na standardowej bazie ortonormalnej $(j,k) := e_j \otimes e_k$ w $\mathbb{C}^{\otimes 2}$ wzorami [Wys10a, Equations (2.6)]

$$\begin{aligned} \alpha(j,j) &= (j,j), \quad j = 1,2,3, \\ \alpha(1,2) &= -q(2,1), \\ \alpha(1,3) &= -q(3,1), \\ \alpha(3,2) &= -q(2,3), \\ \alpha(3,1) &= (1-q^2)(3,1) - q(1,3), \end{aligned}$$

który spełnia równania Yanga-Baxtera i jego kwadrat jest samosprzężony $\alpha^2 = (\alpha^2)^*$. Ponadto okazało się, że spełnia on równanie trzeciego rzędu (sześcienne)

$$(\alpha^2 - I)(\alpha + q^2 I) = 0$$

i dlatego generuje rodzinę *sześciennych algebr Hecke* $\mathcal{H}_{q,n}(2)$ (w sensie Funara [37]).

Moja konstrukcja była nowym nietrywialnym przykładem rodziny sześciennych algebr Hecke (u Funara było równanie sześcienne $\alpha^3 = 1$).

5.5. $d-$**deformacja wolnej przestrzeni Focka, artykuł** [Wys05a]**.** W aartykule [Wys05a] badałem deformacje operatorów gaussowskich na wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(H)$, zbudowanej na przestrzeni Hilberta H, oraz ich rozkłady wzgleędem stanu próżniowego. Zdefiniowałem następujące deformacje.

Definicja. [Wys05a, Definition 2.1] *Dla $d > 0$ i dla wektora $f \in H$ określamy dwa operatory na $\mathcal{F}(H)$*

$$\begin{aligned} D(f)(x \otimes y) &= \langle f, x \rangle \cdot \langle f, y \rangle \cdot \Omega, \quad x, y \in H_{\mathbb{C}} \\ D(f)v &= 0 \quad \textit{if} \quad v \perp H_{\mathbb{C}} \otimes H_{\mathbb{C}}, \\ D^*(f)\Omega &= f \otimes f, \\ D^*(f)v &= 0 \quad \textit{jeśli} \quad v \perp \Omega. \end{aligned}$$

Tutaj Ω oznacza wektor próżniowy, $H_{\mathbb{C}}$ jest kompleksyfikacją H a $D^*(f)$ jest operatorem sprzężonym do $D(f)$ na $\mathcal{F}(H)$. Następnie, dla $d \in \mathbb{R}$, dla wektora jednostkowego $f \in H$ i operatora kreacji $A^\dagger(f)$ oraz operatora anihilacji $A(f)$ rozważałem deformacje operatorów gaussowskich

$$G_d(f) := A(f) + dD(f) + A^\dagger(f) + dD^*(f)$$

i badałem ich rozkłady μ_d względem stanu próżniowego ω. Równoważnie, sprowadziłem to do wyznaczaniu momentów

$$M_d(n) := \langle (G_d)^n \delta_0, \delta_0 \rangle$$

operatorów $\mathtt{G}_d$ rozważanych na ℓ^2, działających na ortonormalnej bazie standardowej $\{\delta_n : n \geq 0\} \subset \ell^2$ wzorami

$$\begin{aligned} \mathtt{G}_d\delta_0 &= \delta_1 + d\delta_2, \\ \mathtt{G}_d\delta_2 &= d\delta_0 + \delta_1 + \delta_3, \\ \mathtt{G}_d\delta_n &= \delta_{n-1} + \delta_{n+1}, \quad \text{if} \quad n \geq 3 \quad \text{or} n = 1. \end{aligned}$$

Motywacją tych rozważan były moje poprzednie badania [BWys01], w których pokazałem, że t-transformacja miary była związana z perturbacją działającą nietrywialnie tylko na $\mathbb{C}\Omega \longleftrightarrow H$. Dl;atego perturbacje działające nietrywialnie tylko na $\mathbb{C}\Omega \longleftrightarrow H \otimes H$ stanowiły następne naturalne wyzwanie.

Pokazałem [Wys05a, formulas (1), (2)] wzory rekurencyjne dla tych momentów, w których pojawiają się liczby Catalana $C_n := \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$:

$$\begin{aligned} M_d(0) &= 1, \quad M_d(1) = 0, \quad M_d(2) = 1 + d^2, \quad M_d(3) = 2d, \quad M_d(4) = 2 + 3d^2 + d^4, \\ M_d(2n) &= C_n + d^2 \sum_{s=1}^{n} C_{n-s} \sum_{k=1}^{s} C_k M_d(2s-2k) + d \sum_{s=3}^{n} C_{n-s} \sum_{k=1}^{s-2} C_k M_d(2s-2k-1) \\ &+ d \sum_{s=2}^{n-1} (C_{n-s+1} - C_{n-s}) M_d(2s-1), \quad n \geq 3, \\ M_d(2n+1) &= d^2 \sum_{s=2}^{n} C_{n-s} \sum_{k=1}^{s-1} C_k M_d(2s-2k+1) + d \sum_{s=1}^{n} C_{n-s} \sum_{k=1}^{s} C_k M_d(2s-2k) \\ &+ d \sum_{s=0}^{n-1} (C_{n-s+1} - C_{n-s}) M_d(2s), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Funkcja tworząca tych momentów jest dana jawnym wzorem [Wys05a, Proposition 3.1]:

$$\mathcal{M}_d(x) := \frac{2x^2}{4x^3 d + (2d^2+1)x^2 - 2xd - d^2 + (d+x)\sqrt{1-4x^2}},$$

z którego wynika postać transformaty Cauchy'ego miary μ_d

$$\mathcal{G}_d(z) := \frac{2}{-z^3 d^2 - 2z^2 d + (2d^2+1)z + 4d + (1+zd)z\sqrt{1 - \frac{4}{z^2}}}.$$

Z tego wzoru otrzymuje się część absolutnie ciągłą miary.

Twierdzenie. [Wys05a, Theorem 4.1] *Rozkład μ_d ma gęstość*

$$g_d(x) := \frac{(1+xd)x^2\sqrt{4-x^2}}{(1+xd)^4 - (x^2-1)(x^2-2)(1+xd)^2 + (x^2-1)^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

W szczególności

$$g_d(0) = \lim_{x\to 0} g_d(x) = \frac{1}{\pi(1+4d^2)}.$$

Przypadek szczególny $d = 1$ ma następujący jawny opis.

Proposition. [Wys05a, Proposition 5.1] *Rozkład μ_1 ma gęstość*

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{5-x^2}, \quad -2 \le x \le 2$$

oraz atomy w -1 i $\sqrt{5}$, oraz postać jawną

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\delta_{\sqrt{5}} + g_1(x)dx.$$

W tym przypadku momenty nieparzyste są dane prostym wzorem $M(2n+1) = \frac{5^n-1}{2}$, natomiast momenty parzyste są dane przez szereg hipergeometryczny Eulera, który też można jawnie wyliczyć.

Proposition. [Wys05a, Proposition 5.2] *Momenty parzyste miary μ_1 są dane wzorem*

$$M_1(2n) \;=\; \frac{1+5^{n-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{4^{n+1}(2n-1)!!}{10\sqrt{5}(2n+2)!!}\cdot\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+5)!!(n+1)}{(2k)!!2(n+k+2)}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}\right].$$

W ogólnym przypadku $0 < d \neq 1$ otrzymałem następujący wynik.

Twierdzenie. [Wys05a, Theorem 6.1] *Dla dodatniej liczby $d \neq 1$ rozkład μ_d ma gęstość $g_d(x)$. Ponadto, nie ma atomów jeśli $0 < d < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Jeśli $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \le d < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, to rozkład ten ma jeden atom w przedziale $[2,\infty)$, a dla $\frac{\sqrt{3}+1}{2} \le d$ ma dwa atomy: jeden w $x_+ \ge 2$ i drugi $x_- \le -2$. Atomy te są jednoznacznie wyznaczone jako rozwiązania równań $\varphi(x_+) = d = \psi(x_-)$, w których funkcje φ, ψ są ściśle monotoniczne i dane wzorami*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{x}\cdot\left(\sqrt{\frac{2(x^2-1)}{x^2-2-x\sqrt{x^2-4}}}-1\right), \quad x \ge 2,\\ \psi(x) &= \frac{-1}{x}\cdot\left(\sqrt{\frac{2(x^2-1)}{x^2-2+x\sqrt{x^2-4}}}+1\right), \quad x \le -2.\end{aligned}$$

5.6. **Niezależności nieprzemienne (bf-niezależność i cf-niezależność), artykuły** [KWys13, SWys16]**.**

5.6.1. *artykuł* [KWys13]. W artykule [KWys13], wspólnym z Anną Kulą, skonstruowaliśmy model dla mieszanej niezależności boole'owskiej i wolnej. Oparty jest on o konstrukcję bf-produktu przestrzeni Hilberta [KWys13, Definition 2.1] oraz bf-rozszerzeń operatorów [KWys13, Definition 2.2]. Mianowicie, bf-produkt rodziny przestrzeni Hilberta $\{\mathbf{H}_\xi = \mathbb{C}\Omega \oplus \mathbf{H}^0_\xi : \xi \in \mathcal{X}\}$, indeksowanych zbiorem częściowo uporządkowanym $(\mathcal{X}, \preceq)$, jest to przestrzeń HIlberta $\mathcal{H}$, rozpięta na (jednostkowym) wektorze próżni Ω oraz wszystkich tensorach prostych postaci

$$h_{\eta_1}\otimes\cdots\otimes h_{\eta_m}, \quad h_{\eta_k} \in \mathbf{H}^0_{\eta_k}, \quad 1 \le k \le m, \quad \eta_1 \neq \eta_2 \neq \ldots \neq \eta_m,$$

gdzie ciąg skończony $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ jest łańcuchem (to zaczy, że każde dwa jego elementy są porównywalne). Wówczas $\mathcal{H}$ ma naturalny iloczyn skalarny na każdej podprzestrzeni $\mathbf{H}^0_{\eta_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{H}^0_{\eta_m}$, i każde dwie takie podprzestrzenie są ortogonalne, jeśli określające je ciągi indeksów są różne.

Na takiej przestrzeni, dla dowolnego indeksu $\xi \in \mathcal{X}$, zdefiniowaliśmy bf-rozszerzenie operatora $\mathbf{A}_\xi$, ograniczonego na $\mathbf{H}_\xi$, do operatora ograniczonego na bf-produkcie $\mathcal{H}$. Ideologicznie, takie rozszerzenie działa na tensorze prostym $h_{\eta_1} \otimes \cdots \otimes h_{\eta_m}$ zgodnie z pierwszym indeksem η_1 w taki sposób, że otrzymany w rezultacie ciąg indeksów jest znowu łańcuchem; w przeciwnym razie wynikiem jest wektor zerowy.

Udowodniliśmy, że ta konstrukcja posiada następujące ważne dwie cechy, które uprawniają do nazwania jej bf-niezależnością.

Twierdzenie. [KWys13, Theorem 2.1] *Dla $\xi \in \mathcal{X}$ niech $\mathcal{A}_\xi$ będzie algebrą bf-rozszerzeń operatorów z $B(\mathbf{H}_\xi)$ na bf-produkt $\mathcal{H}$.*

(*B*) *Jeśli zbiór $\mathcal{X}$ indeksów jest antyłańcuchem, to algebry $\{\mathcal{A}_\xi : \xi \in \mathcal{X}\}$ są niezależne boole'owsko.*

(*F*) *Jeśli zbiór $\mathcal{X}$ indeksów jest łańcuchem, to algebry $\{\mathcal{A}_\xi : \xi \in \mathcal{X}\}$ są wolnie niezależne.*

Dla takiej konstrukcji rozważaliśmy także analogi CTG. Jako zbiór częściowo uporządkowany rozważaliśmy $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, z częściowym porządkiem $\preceq$ określonym przez stożek dodatni $\Pi_d = \mathbb{R}^d_+$. Zdefiniowaliśmy znormalizowane sumy częściowe

$$S_\xi := \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{J}_\xi|}} \sum_{\eta \in \mathbf{J}_\xi} A_\eta,$$

w których sumowanie jest po zbiorach skończonych postaci

$$\mathbf{J}_\xi := \{\eta = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d : \ 0 \le a_j \le b_j\} \quad \text{jeśli} \quad \xi = (b_1, \ldots, b_d) \in \Pi_d,$$

a $|\mathbf{J}_\xi|$ oznacza ilość elementów.

Przy takich oznaczeniach udowodniliśmy następujące twierdzenie (w którym $\xi \to \infty$ oznacza, że $b_1, \ldots, b_d \to \infty$).

Twierdzenie. [KWys13, Theorem 3.1] *Niech $\{A_\xi : \xi \in \mathbb{N}^d\}$ będzie rodziną bf-rozszerzeń samosprzężonych operatorów spełniających: $\omega(A_\xi) := \langle A_\xi \Omega, \Omega \rangle = 0$ and $\omega(A_\xi^2) := \langle A_\xi^2 \Omega, \Omega \rangle = 1$. Wówczas, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje granica*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\xi \to \infty} \varphi((S_\xi)^{2n+1}), \\ g_n(d) &= \lim_{\xi \to \infty} \varphi((S_\xi)^{2n}) \end{aligned}$$

i dla każdego $d \in \mathbb{N}$, ciąg $(g_n(d))_{n \ge 0}$ jest ciągiem parzystych momentów symetrycznej miary probabilistycznej μ_d on $\mathbb{R}$.

Dowód sprowadza się do oszacowania liczności $|\mathtt{bfNC}_2^n(\mathbf{J}_\xi)|$, gdzie $\mathtt{bfNC}_2^n(\mathbf{J}_\xi)$ jest zbiorem wszystkich bf-porządków na dwupartycjach zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, zadanych przez elementy zbioru $\mathbf{J}_\xi$. W tym celu wprowadziliśmy podzbiory $\mathtt{bfNC}_{2,1}^n(\mathbf{J}_\xi)$ takich elementów z $\mathtt{bfNC}_2^n(\mathbf{J}_\xi)$, które mają tylko jeden blok zewnętrzny i pokazaliśmy [KWys13, Lemma 3.2]

$$|\mathtt{bfNC}_{2,1}^n(\mathbf{J}_\xi)| = L_n \cdot |\mathbf{J}_\xi|^n + O(|\mathbf{J}_\xi|^{n-1})$$

dla pewnego ciągu $(L_n)_{n \ge 0}$. Podobnie pokazaliśmy w [KWys13, Lemma 3.3], że

$$|\mathtt{bfNC}_2^n(\mathbf{J}_\xi)| = K_n \cdot |\mathbf{J}_\xi|^n + O(|\mathbf{J}_\xi|^{n-1})$$

dla pewnego ciągu $(K_n)_{n \ge 0}$. Z tego wynikała reekurencja

$$g_n(d) := K_n = \sum_{k=1}^{n} K_{n-k} L_k.$$

5.6.2. *artykuł* [SWys16]. W artykule [SWys16], wspólnym z Rolandem Speicherem, rozważaliśmy konstrukcję niezależności zadaną przez macierz $(\varepsilon_{ij})_{i,j\in I}$, indeksowaną pewnym zbiorem I, o wyrazach $\varepsilon_{ij} \in \{0,\ 1\}$. Taka konstrukcja była podana przez Wojciecha Młotkowskiego [43] pod nazwą $\Lambda-$niezależność (którą my określiliśmy mianem $\varepsilon-$niezależność).

Definicja. [SWys16, Definition 3.2]

(1) *Niech $I_n^\varepsilon \subset I^n$ będzie podzbiorem składającym się ze wszystkich takich ciągów $\mathbf{i} := (i(1), \dots, i(n)) \in I^n$, które spełniają warunek: jeśli $i(k) = i(l)$ dla pewnego $1 \le k < l \le n$, to istnieje $k < p < l$ takie, że $\varepsilon_{i(k)i(p)} = 0$.*
(2) *Rodzina $\{\mathcal{A}_i :\ i \in I\}$ podalgebr w nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \varphi)$ jest $\varepsilon-$niezależna, jeśli*
   - *$\mathcal{A}_i$ i $\mathcal{A}_j$ komutują gdy $\varepsilon_{ij} = 0$;*
   - *jeśli $\mathbf{i} := (i(1), \dots, i(n)) \in I_n^\varepsilon$ oraz $a_k \in \mathcal{A}_{i(k)}$ są takie, że $\varphi(a_k) = 0$ dla $k = 1, \dots, n$, to $\varphi(a_1 \dots a_n) = 0$.*

Jako przykład podaliśmy, że ε-produkt grup $G := \star_\varepsilon G_i$, określony jako iloraz produktu wolnego grup przez relacje komutacji postaci $[G_i, G_j] = e$ jeśli $\varepsilon_{ij} = 1$, spełnia warunki ε-niezależności w nieprze,moiennej przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{C}[G], \tau)$, gdzie τ jest stanem na algebrze grupowej $\mathbb{C}[G]$ określonym jako branie wartości w elemencie neutralnym $e \in G$.

Głównym wynikiem artykułu [SWys16] jest opis ε-niezależności przy pomocy wolnych kumulant. Zazwyczaj taka relacja jest dana poprzez *wzór na momenty-kumulanty* , w którym dany moment mieszane jest wyrażony jako suma, w której pojawiają się kumulanty związane z pewnymi partycjami. Pokazaliśmy jaki szczególny zbiór partycji pojawia się w takim wzorze dla ε-niezalżności, oraz że w takim wzorze występują wolne kumulanty $\{\kappa_m :\ m \ge 1\}$. .

Mianowicie, aby wyliczyć moment mieszany postaci $\varphi(a_1 \dots a_n)$, dla elementów $a_k \in \mathcal{A}_{i(k)}$, $1 \le k \le n$, gdzie algebry $\mathcal{A}_k$ są $\varepsilon-$niezależne w $(\mathcal{A}, \varphi)$, rozważamy ciągi indeksów $\mathbf{i} := (i(1), \dots, i(n))$ i określamy zbiory $NC^\varepsilon(\mathbf{i})$ związanych z nimi ε-nieprzecinających partycji w następujący sposób [SWys16, Definition 5.1]. Mówimy, że $\pi \in NC^\varepsilon(\mathbf{i})$ jeśli π jest partycją zbioru $\{1, \dots, n\}$ o następujących własnościach

- blok partycji π łączy dwa elementy $1 \le k < l \le n$ (notacja: $k \sim_\pi l$) tylko jeśli odpowiadające im elementy z $\mathbf{i}$ są równe, czyli jeśli $i(k) = i(l)$;
- jeśli istnieje $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 \le n$ takie, że $k_1 \sim_\pi k_2$ oraz $l_1 \sim_\pi l_2$, gdzie $k_1 \nsim_\pi l_1$, to $\varepsilon_{i(k_1)i(l_1)} = 1$; czyli przecięcia są dopuszczalne tylko jeśli odpowiednie algebry komutują.

Wówczas wzór na momenty-kumulanty dla ε-niezależności jest dany przez następujące twierdzenie.

Twierdzenie. [SWys16, Theorem 5.2] *Niech $\{\mathcal{A}_i :\ i \in I\}$ będą ε-niezależnymi podalgebrami w nieprze,miennej przestrzeni probablistycznej $(\mathcal{A}, \varphi)$ i niech $a_k \in \mathcal{A}_{i(k)}$ dla $1 \le k \le n$. Niech $\mathbf{i} := (i(1), \dots, i(n))$, wówczas prawdziwy jest następujący wzór*

$$\varphi(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC^\varepsilon(\mathbf{i})} \kappa_\pi(a_1 \dots a_n),$$

gdzie, z definicji

$$\begin{aligned} \kappa_\pi(a_1 \dots a_n) &:= \sum_{B \in \pi} \kappa_B(a_1 \dots a_n), \\ \kappa_B(a_1 \dots a_n) &:= \kappa_m(a_{k_1}, \dots, a_{k_m}) \quad \textit{jeśli} \quad B = \{k_1 < \dots < k_m\} \in \pi. \end{aligned}$$

5.7. **Słabo monotoniczna przestrzeń Focka, artykuły** [Wys05, CGWys20].

5.7.1. *artykuł* [Wys05]. Moją motywacją do konstrukcji słabo monotonicznej przestrzeni Focka była chęć skonstruowania przykładu operatorów monotonicznie niezależnych, działających na (podprzestrzeni) wolnej przestrzeni Focka, które by miały rozkłady dane przez prawo arkusa sinusa, czyli przez monotoniczne CTG. Taka przestrzeń pojawiła się początkowo w wykładach Marka Bożejki z 2002r., opublikowanych jednak dopiero w [44], jako specjalny przykład ogólnej deformacji typu $\mu-$CCR i $\mu-$CAR zdefiniowanych przez Wiesława Pusza and Stanisława Lecha Woronowicza [45]. Mianowicie, 0-CAR daje dyskretną przestrzeń monotoniczną Focka (Murakiego), a w przypadku 0-CCR otrzymuje się słabo monotoniczną przestrzeń Focka.

Jednak moja konstrukcja startowała z innego punktu widzenia niż obserwacja Marka Bożejki. Rozważałem podprzestrzeń $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$ wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, zbudowaną na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, która jest rozpięta przez vektor próżni Ω oraz tensory proste postaci

$$e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}, \quad \text{dla} \quad i_r \geq \ldots \geq i_1,$$

gdzie $\{e_r : \ r \in \mathbb{N}\}$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Następnie, dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, określa się operatory słabo monotonicznej kreacji $(A_i^M)^* = A^*(e_i)$ i słabo monotonicznej anihilacji $A_i^M := A(e_i)$ na $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$ następującymi wzorami

$$\begin{aligned}
(A_i^M)^*\Omega &= e_i, \\
A_i^M\Omega &= 0, \\
(A_i^M)^*(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= e_i \otimes e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}, \quad \text{jeśli} \quad i \geq i_r, \\
(A_i^M)^*(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= 0, \quad \text{jeśli} \quad i < i_r, \\
A_i^M(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= e_{i_{r-1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}, \quad \text{jeśli} \quad i = i_r, \\
A_i^M(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= 0, \quad \text{jeśli} \quad i \neq i_r,
\end{aligned}$$

Słabo monotoniczne operatory kreacji i anihilacji są określone tak, aby zachowywały słabo monotoniczną przestrzeń Focka $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$. Ponadto, są one wzajemnie sprzężone do siebie.

Dla operatorów położenia $G_i := (A_i^M)^* + A_i^M$, $i \in \mathbb{N}$, podałem bezpośredni dowód odpowiedniego CTG [Wys05, Theorem 3.1]. Pozwoliło mi to otrzymać nowy wzór rekurencyjny na (znormalizowane) najwyższe współczynniki dwumianowe (które są parzystymi momentami rozkładu arkus sinus)

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot g_{k-1} \cdot g_{n-k}, \quad \text{where} \quad g_n := \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n},$$

który, po pomnożeniu przez 2^n daje dowód znanego wzoru

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot \binom{2n-2k}{n-k}.$$

Czerpiąc dalszą motywację z konstrukcji t-deformacji wolnej przestrzeni Focka [BWys01], rozważałem deformacje wolnych operatorów kreacji i anihilacji, dane przez operator określony w [Wys05, Definition 4.1]: dla $f, x \in \mathcal{H}$ i $\|f\| = 1$ niech

$$\begin{aligned}
C(f)x &= \langle f, x\rangle\Omega, \\
C(f)v &= 0 \quad \text{jeśli} \quad v \in \mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H}), \quad v \perp \mathcal{H}, v \perp \Omega, \\
C(f)^*\Omega &= f, \\
C(f)^*v &= 0, \quad \text{jeśli} \quad v \perp \Omega.
\end{aligned}$$

Następnie, dla parametru $c \in \mathbb{R}$ i wektora jednostkowego $f \in \mathcal{H}$, rozważałem następujące operatory samosprzężone na wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

$$G_c(f) := (a^\dagger(f) + c \cdot C(f)^*) + (a(f) + c \cdot C(f)),$$

i obliczyłem ich momenty względem stanu próżniowego ψ

$$M_c(n) := \langle G_c(f)^n \Omega, \Omega \rangle = \psi(G_c(f)^n)$$

Te momenty okazały się być momentami następującej miary probabilistycznej.

Twierdzenie. [Wys05, Theorem 4.2] *Ciąg $\{M_c(n) : \ n = 0, 1, 2, \dots\}$ jest ciągiem momentów miary probabilistycznej μ_c, danej następującymi wzorami (zależnymi od parametru $c \in \mathbb{R}$)*

$$\begin{aligned}
\mu_c &= \delta_0, \quad \text{dla} \quad c = -1, \\
\mu_c(dx) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad \text{dla} \quad |c+1| = \sqrt{2}, \\
\mu_c(dx) &= \frac{1}{2\pi(1+c)^2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{1 - \frac{c(c+2)}{(1+c)^4} x^2} dx, \quad \text{dla} \quad |c+1| < \sqrt{2}, \quad c \neq -1, \\
\mu_c(dx) &= \frac{1}{2\pi(1+c)^2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{1 - \frac{c(c+2)}{(1+c)^4} x^2} dx + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c(c+2)}\right)(\delta_{x_c^+} + \delta_{x_c^-}), \quad \text{dla} \quad |c+1| > \sqrt{2}, \\
x_c^\pm &:= \pm \frac{(1+c)^4}{c(c+2)}.
\end{aligned}$$

W szczególnym przypadku $c = c_N := 1 - \sqrt{\frac{2N}{2N-1}}$ otrzymuje się miary Kestena [3].

Dla $c = -1 + \sqrt{2}$ operatory te mają rozkład arkusa sinusa.

Następnie rozważałem obcięcia operatorów $G_c(f)$, dla $c = -1 + \sqrt{2}$, do słabo monotonicznej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$. To obcięcie, oznaczone jako $B(f)$, także ma rozkład arkusa sinusa, ale, niestety, nie były one monotonicznie niezależne. Dlategov wprowadziłem dodatkową perturbację słabo monotonicznych kreacji i anihilacji, która dała następujące operatory [Wys05, Definition 5.2]

$$K_c(n) := (A_n^M + (A_n^M)^*) + c \cdot (D_n + D_n^*),$$

w których operatory perturbacji D_n i D_n^* zostały zdefiniowane na $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$ w następujący sposób (podbnie jak operatory monotonicznej kreacji i ahnihilacji).

Definicja. [Wys05, Definition 5.1]

$$\begin{aligned}
D_n^*(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= e_n \otimes e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}, \quad \textit{jeśli} \quad n > i_r, \\
D_n^*(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= 0, \quad \textit{jeśli} \quad n \leq i_r, \\
D_n(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= e_{i_{r-1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}, \quad \textit{jeśli} \quad n = i_r > i_{r-1}, \\
D_n(e_{i_r} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}) &= 0, \quad \textit{poza tym}.
\end{aligned}$$

Pokazałem w [Wys05, Theorem 5.1], że rodzina operatorów $\{K_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ jest monotonicznie niezależna (dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$), a dla $c = -1 + \sqrt{2}$ każdy operator ma rozkład arkusa sinusa [Wys05, Proposition 5.2].

W nastęnej kolejności rozważałem operatory na $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$, określione dla parametru $\lambda > 0$ wzorem

$$P_\lambda := (A^* + cD^* + \lambda I)(A + cD + \lambda I)$$

które, w kontekście nieprzemiennej probabilistyki, mogą definiować proces typu Poissona z intensywnością λ (jeśli rozważa się ich rozkłady względem stanu próżniowego). Okazało się, że w tym przypadku tak nie jest, ponieważ otrzymane rozkłady nie były tymi, które uzyskał, w formie niejawnej, Naofumi Muraki [32].

Niemniej jednak pewne ciekawe rachunki pozwoliły opisać rozkłady tych operatorów.

Twierdzenie. [Wys05, Theorem 6.1] *Miara typu Poissona ν_λ, dana momentami*

$$\psi((P_\lambda)^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \ \nu_\lambda(dx),$$

ma następują cą jawną postać

$$\nu_\lambda = \beta_+(\lambda)\delta_{\lambda(1+\lambda^2+x_+)} + \beta_-(\lambda)\delta_{\lambda(1+\lambda^2+x_-)} + h_\lambda(x)dx,$$

gdzie

1. *atom dodatni* $x_+ := \sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}$ *ma masę*
$$\beta_+(\lambda) := \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{3\sqrt{1+4\lambda^2}+1+4\lambda^2}$$
i występuje dla wszystkich$\lambda > 0$,
2. *atom ujemny* $x_- := -(\lambda + \frac{1}{\lambda})$ *ma masę*
$$\beta_-(\lambda) := \frac{2(1-\lambda^2)}{2-\lambda^2}$$
i występuje wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \lambda \leq 1$,
3. *część absolutnie ciągła jest dana wzorem*
$$h_\lambda(x) := \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{[(\lambda+1)^2 - x][x-(\lambda-1)^2]}}{x[2(1+\lambda^2)x - (x^2+\lambda^2(\lambda^2-2))]}, \quad \textit{for} \quad (\lambda-1)^2 \leq x \leq (\lambda+1)^2,$$
dla wszystkich $\lambda > 0$.

5.7.2. *artykuł* [CGWys20]. W artykule [CGWys20], wspólnym z Vitonofrio Crismale i Marią Eleną Griseta, badaliśmy rozkłady sum operatorów położenia na słabo monotonicznej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$. Jeśli $\{e_i \in \mathcal{H} : \ i \in \mathbb{N}\}$ oznacza bazę ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to $A_i^\dagger$ i A_i oznaczają odpowiednio operator kreacji i anihilacji przez wektor e_i. Operatory te są wzajemnie sprzężone $(A_i)^* = A_i^\dagger$ i spełniają pewne relacje komutacji.

Lemat. [CGWys20, Lemma 2.1] *Następujące relacje komutacji są prawdziwe:*

$$\begin{aligned} A_i^\dagger A_j^\dagger &= 0 \quad \textit{jeśli} \quad i<j, \\ A_k A_j A_j^\dagger &= \begin{cases} A_k & \textit{jeśli} \quad j \geq k \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \\ A_j A_j^\dagger A_k &= A_k \quad \textit{jeśli} \quad j \geq k. \end{aligned}$$

W szczególności, $A_j A_j^\dagger$ *komutuje z* A_k *jeśli* $j \geq k$.

Ważną własnością jest to, że $*$-algebry generowana przez operatory kreacji i anihilacji są monotonicznie niezależne.

Twierdzenie. [CGWys20, Theorem 2.2] *Niech* $\mathcal{B}_i$ *będzie* $*-$*algebrą generowaną przez* A_i *i* $A_i^\dagger$ *i niech* $(\mathcal{B}, \omega)$ *będzie* C^**-przestrzenią probabilistycznąskładającą się z* C^**-algebry* $\mathcal{B} = B(\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H}))$ *wszystkich operatorow ograniczonych na słabo monotonicznej przestrzeni Focka* $\mathcal{F}_{WM}(\mathcal{H})$ *ze stanem próżniowym* ω. *Wówczas algebry* $\{\mathcal{B}_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ *są monotonicznie niezależne w* $(\mathcal{B}, \omega)$

Każdy operator położenia $G_i := A_i + A_i^\dagger$ jest samosprzężony i względem stanu próżniowego ma rozkład Wignera, ponieważ momenty (parzyste) są liczbami Catalna

$$\omega((G_i)^n) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} & \text{jeśli} \quad n = 2k \\ 0 & \text{jeśli} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Jest to inna sytuacja niż w dyskretnej monotonicznej przestyrzeni Focka u Muraki'ego, gdzie operatory położenia mają dwupunktowy rozkład Bernoulli'ego $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1})$.

Dla sumy dwóch operatorów położenia $G_1 + G_2$ podaliśmy ciąg momentów.

Proposition. [CGWys20, Proposition 3.2] *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ (parzyste) momenty operatora $G_1 + G_2$*

$$\omega((G_1 + G_2)^{2n}) = d_n$$

spełniają rekurencję

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(d_{k-1} + C_{k-1}), \quad d_0 = 1$$

gdzie C_n są liczbami Catalana.

Z tej własności wynika, że rozkład można wyliczyć jawnym wzorem

Twierdzenie. [CGWys20, Theorem 3.4] *Rozkład operatora G_1+G_2 względem stanu próżniowego ω jest absolutnie ciągły i ma gęstość $g(x)$ daną wzorem*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{\sqrt{100-16x^2} - x^2 + 10} - \sqrt{4-x^2}\right) & \textit{dla} \quad |x| \leq 2 \\ \frac{1}{4\pi}\sqrt{-2x^2 - 2|x|\sqrt{4-x^2} + 20} & \textit{dla} \quad 2 \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \textit{dla} \quad |x| \geq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ponieważ operatory G_1 i G_2 są monotonicznie niezależne, szczególności, wynika stąd że powyższa miara jest splotem monotonicznym dwóch kopii rozkładu Wignera. Analogicznie, z monotonicznej niezależności operatorów $G_1, \dots, G_m$, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ wynika, że rozkłąd sumy $G_1 + \cdots + G_m$ jest m-tą potęgą splotową monotoniczną rozkładu Wignera. Rozkład (względem ω) sumy m opratorów położenia opisaliśmy (jedynie) za pomocą rekurencji dla jego momentów.

Twierdzenie. [CGWys20, Theorem 3.5] *Momenty sumy $G_1 + \cdots + G_m$*

$$\omega((G_1 + \cdots + G_m)^{2n}) = d_n^{(m)}$$

spełniają rekurencję

$$d_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}^{(m)} \sum_{j=1}^{k} d_{k-1}^{(j)}, \quad d_0^{(m)} = 1, d_n^{(1)} = C_n \quad \textit{for all} \quad m \geq 1, n \geq 0,$$

w której C_n oznaczają liczby Catalana.

Pokazaliśmy też w [CGWys20, Proposition 3.6], że $d_n^{(m)}$ jest wielomianem stopnia n zmiennej m.

Jeśli teraz ν_m oznacza miarę probabilistyczną, która jest rozkłade sumy $G_1+\cdots+G_m$ (względem ω), to jest to miara o nośniku zwartym zawartym w przedziale $[-a_m, a_m]$, gdzie prawe końce a_m spełniają dodatkowe relacje [CGWys20, Theorem 3.9]

$$a_{m+1} = a_m + \frac{1}{a_m}$$

oraz oszacowanie [CGWys20, Theorem 3.10]

$$\sqrt{m+\sqrt{m(m+1)}} \leq a_m \leq \sqrt{2m+\sqrt{2m}}.$$

Lewe oszacowanie jest równoważne z tym, że ciąg $\frac{a_m}{\sqrt{m}}$ jest malejący do $\sqrt{2}$, tak więc nośniki $[-\frac{a_m}{\sqrt{m}}, +\frac{a_m}{\sqrt{m}}]$ rozkładów unormowanych sum $\frac{1}{\sqrt{m}}(G_1+\cdots+G_m)$ są ciągiem zstępującym do przedziału $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, jak to wynika z monotonicznego CTG.

5.8. **bm-CTG dla stożków niesymetrycznych, artykuł** [OWys19]**.** W artykule [OWys19], wspólnym z moim doktorantem Lahcenem Oussi, badaliśmy CTG dla pewnych stożków niesymetrycznych, analogicznie do przypadku stożków symetrycznych. Stożki niesymetryczne nie są sklasyfikowane i problemem jest znalezienie takich, które by miały dodatkową strukturę geometryczną (taką jak np. charakterystyka objętościowa).

Badaliśmy trzy klasy stożków niesymterycznych:

1. stożki sektorowe
$$\Pi = \Omega^d_{\mathbf{u}} := \{\sum_{k=1}^{d} a_k\mathbf{u}_k : \ a_k \geq 0, k=1,\dots,d\},$$
gdzie $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_d)$ jest d-elementowym ciągiem wektorów liniowo niezależnych w $\mathbb{R}^d$ o dodatnim wyznaczniku $\det(\mathbf{u}) > 0$, które nie są ortonormalne;
2. stożki cyrkularne
$$\Pi = C^d_\theta := \{(t;x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} : \ \|x\| \leq t\tan\theta\},$$
gdzie $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$ a $\|x\|$ jest normą euklidesową wektora $x \in \mathbb{R}^d$;
3. stożek Vinberga $\Pi = \Pi_V$: określamy pięciowymiarową rzeczywistą podprzestrzeń liniową $V \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$
$$V := \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : \ \text{dla } a_1,\dots,a_5 \in \mathbb{R} \right\},$$
z iloczynem skalarnym $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i + 2\sum_{j=4}^{5} a_jb_j$ dla $a,b \in V$. Stożek Vinberga $\Pi_V \subset V \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ jest zdefiniowany przez następujące trzy warunki:
$$a_1 \geq 0, \quad a_1a_2 \geq a_4^2, \quad a_1a_3 \geq a_5^2.$$

W każdej z tych klas wyszczególniliśmy (dyskretny przeliczalny) podzbiór indeksów $\mathbf{I}$:

(1) $\mathbf{I} := \Omega^d_{\mathbf{u}} \cap \mathbb{Z}^d$,
(2) $\mathbf{I} := C^d_\theta \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1})$,
(3) $\mathbf{I} := \Pi_V \cap \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$.

Następnie, dla $\xi \in \Pi$ i $N \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy skończone podzbiory zdylatowanych przedziałów $\mathrm{J}_N(\xi) := [0, N\xi] \cap \mathbf{I}$ i udowodniliśmy następujące bm-CTG:

Twierdzenie. [OWys19, Section 3] *Niech $\{X_\rho : \rho \in \mathbf{I} \subset \Pi\}$ będzie rodziną bm-niezależnych zmiennych losowych w nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \varphi)$, spełniających $\varphi(X_\rho) = 0$ i $\varphi((X_\rho)^2) = 1$. Dla $\xi \in \Pi$ i $N \in \mathbb{N}$ określamy sumy częściowe*

$$S_N(\xi) := \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{J}_N(\xi)|}} \sum_{\rho \in \mathrm{J}_N(\xi)} X_\rho$$

znormalizowane przez pierwiastek z ilości elementów. Wówczas dla dowolnego $n \geq 0$ istnieje granica

$$g_n = g_n(\Pi) := \lim_{N\to\infty} \varphi((S_N(\xi))^n)$$

Dla stożków sektorialnych i cyrkularnych te granice nie zależą od wyboru $\xi \in \Pi$, natomiast dla stożka Vinberga zależą w pewien sposób. Ponadto, ciąg graniczny jest ciągiem momentów miary probabilistycznej μ_Π na $\mathbb{R}$ przy czym $g_n = 0$ jeśli n jest nieparzyste, a momenty parzyste spełniają rekurencję

$$g_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot g_{2k-2} \cdot g_{2n-2k}, \quad g_0 = 1,$$

w której ciąg $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ jest charakterystyką objętościową stożka niesymetrycznego Π (z wyjątkiem stożka Vinberga).

W szczególności pokazaliśmy istnienie charakterystyki objętościowej dla stożków (niesymetrycznych) cyrkularnych i sektorowych (por. [KWys10]).

Twierdzenie. [OWys19, Theorem 4.1] *Dla każdego stożka sektorowego $\Pi = \Omega^d_{\mathbf{u}}$ i każdego stożka cyrkularnego $\Pi = C^d_\theta$ istnieje ciąg $(\gamma_n)_{n\geq 1}$, zależny (tylko) od stożka, taki, że dla dowolnego $\xi \in \Pi$ jest*

$$\gamma_n = \frac{1}{(\mathtt{vol}[0,\xi])^n} \int_{[0,\xi]} (\mathtt{vol}[0,\rho])^{n-1}\, d\rho.$$

Ponadto, ciąg $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ wyraża się przez charakterystykę objętościową odpowiedniego stożka symetrycznego: dla stożków cyrkularnych jest on równy ciągowi charakterystyki objętościowej stożka Lorentza, natomiast dla stożków sektorowych $\Omega^d_{\mathbf{u}}$ jest

$$\gamma_n = \frac{1}{\det \mathbf{u}} \cdot \frac{1}{n^d},$$

gdzie $\frac{1}{n^d}$ jest charakterystyką objętościową stożka symetrycznego $\mathbb{R}^d_+$.

Dla stożka Vinberga sytuacja jest bardziej skomplikowana. Aby ją zbadać rozważaliśmy następującą transformację

$$\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})^3_{i,j=1} \mapsto T(A) = \left(\frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}\right)^3_{i,j=1} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}),$$

która na stożku Vinberga ma następującą postać

$$\Pi_V \ni \xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \longmapsto T(\xi) := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \xi(\alpha,\beta) \in \Pi_V$$

gdzie

$$\alpha := \frac{a_4}{\sqrt{a_1a_2}}, \quad \beta := \frac{a_5}{\sqrt{a_1a_3}}, \quad \alpha,\beta \in [-1,1].$$

Znaleźliśmy wzór na objętość przedziału $[0,\xi] \subset \Pi_V$, a charakterystyka objętościowa ma następującą formę.

Proposition. [OWys19, Proposition 4.1] *Dla $\xi \in \Pi_V$ oraz $T(\xi) = \xi(\alpha,\beta)$ istnieje ciąg $\gamma_n(\alpha,\beta)$, taki, że*

$$\gamma_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{(\mathtt{vol}[0,\xi])^n} \int_{[0,\xi]} (\mathtt{vol}[0,\rho])^{n-1}\, d\rho$$

5.9. **Łączny promień numeryczny i spektralny dla układu skończonego operatorów, artykuł** [KWys20]**.** W artykule [KWys20], wspólnym z Anną Kulą, wprowadziliśmuy pojęcia *łącznego promienia numerycznego* oraz *łącznego promienia spektralnego* dla układu $d \in \mathbb{N}$ operatorów (ograniczonych) na przestrzeni Hilberta, które są związane ze *słabo monotoniczną przestrzenią Focka* i z *boole'owską przestrzenią Focka.* W badaniach tych korzystaliśmy ze schematu wprowadzonego przez Gelu Popescu [46], który wprowadził analogiczne pojęcia związane z *wolną przestrzenią Focka.*

Przypomnijmy, że dla operatora T na przestrzeni Hilberta H definiuje się (klasyczny) *promień numeryczny*

$$w_{\mathtt{cl}}(T) := \sup\{|\langle Th, h\rangle| : \ h \in H, \ \|h\| = 1\}$$

oraz klasyczny *promień spektralny*

$$r_{\mathtt{cl}}(T) := \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}.$$

Naszą pierwszą obserwacją było, że dla danej zdeformowanej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_\star(H)$ (gdzie $\star$ może oznaczać q-deformację, t-deformację, słabo monotoniczną czy boole'owską przestrzeń Focka, lub inną), jeśli $\dim H = d$, to można zdefiniować takie pojęcia związane z danymi na nich operatorami kreacji. Mianowicie, jeśli $A_1^\star, \ldots, A_d^\star$ są danymi operatorami kreacji na (danej) przestrzeni Focka $\mathcal{F}_\star(H)$, określonymi przez wektory bazy ortonormalnej $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset \mathcal{H}$, i jeśli $T_1, \ldots, T_d \in B(\mathcal{H})$ są operatorami ograniczonymi na (innej) przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to określamy następujące dwa pojęcia:

(1) łączny $\star$-promień numeryczny układu $T_1, \ldots, T_d$:

$$w_\star(T_1, \ldots, T_d) := w_{\mathtt{cl}}(A_1^\star \otimes T_1^* + \ldots + A_d^\star \otimes T_d^*)$$

(2) łączny $\star$-promien spektralny układu $T_1, \ldots, T_d$:

$$r_\star(T_1, \ldots, T_d) := r_{\mathtt{cl}}(A_1^\star \otimes T_1^* + \ldots + A_d^\star \otimes T_d^*)$$

Pewne ogólne własności łącznego $\star$-promienia numerycznego są następujące.

Proposition. [KWys20, Proposition 4]

(*i*) $w_\star(\lambda T_1, \ldots, \lambda T_d) = |\lambda| w_\star(T_1, \ldots, T_d)$ *dla dowolnego* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*
(*ii*) $w_\star(T_1 + T_1', \ldots, T_d + T_d') \le w_\star(T_1, \ldots, T_d) + w_\star(T_1', \ldots, T_d')$*;*
(*iii*) $w_\star(U^*T_1U, \ldots, U^*T_dU) = w_\star(T_1, \ldots, T_d)$ *dla dowolnego unitarnego* $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$*;*
(*iv*) $w_\star(I_\mathcal{K} \otimes T_1, \ldots, I_\mathcal{K} \otimes T_d) = w_\star(T_1, \ldots, T_d)$ *dla dowolnej ośrodkowej przestrzeni Hilberta* $\mathcal{K}$*;*
(*v*) $r_\star(T_1, \ldots, T_d) \le w_\star(T_1, \ldots, T_d)$*.*

W szczególności własność (*iii*) zapewnia, że łączny $\star$-promień numeryczny nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej w H.

W [KWys20, Section 3] rozważaliśmy przypadek operatorów kreacji na boole'owskiej przestrzeni Focka

$$\mathcal{F}_B(H) := \mathbb{C}\Omega \oplus H,$$

na której operatory kreacji B_i^*, $i = 1, \ldots, d$, są określone wzorami

$$B_i^*(h) = \begin{cases} e_i & \text{jeśli} \quad h = \Omega, \\ 0 & \text{jeśli} \quad h \in H. \end{cases}$$

Wówczas pokazaliśmy, że *łączny boole'owski promień numeryczny* układu $d \ge 1$ operatorów $T_1, \ldots, T_d$ jest zdefiniowany jako:

$$w_B(T_1, \ldots, T_d) := w_{\mathtt{cl}}(B_1^* \otimes T_1^* + \ldots + B_d^* \otimes T_d^*)$$

i ma następujący jawny opis.

Proposition. [KWys20, Proposition 5]

$$w_B(T_1,\dots,T_d) = \sup\left\{ |\langle g_0, \sum_{j=1}^{d} T_j g_j\rangle| : \ g_0, g_1, \dots, g_d \in \mathcal{H}, \ \sum_{j=0}^{d} \|g_j\|^2 = 1 \right\}$$

Co więcej, łączny boole'owski promień numeryczny ma następujące własności.

Proposition. [KWys20, Proposition 6] *Łączny boole'owski promień numeryczny spełnia*

$(i)_B$ $w_B(T_1,\dots,T_d) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $T_1 = \cdots = T_d = 0$*;*

$(ii)_B$ *prawdziwe jest oszacowanie*

$$\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{d} T_j T_j^*\right\|^{\frac{1}{2}} \le w_B(T_1,\dots,T_d) \le \left\|\sum_{j=1}^{d} T_j T_j^*\right\|^{\frac{1}{2}};$$

$(iii)_B$ $w_B(X^*T_1X,\dots,X^*T_dX) \le \|X\|^2 w_B(T_1,\dots,T_d)$ *dla dowolnego operatora ograniczonego* $X \in B(\mathcal{H})$.

Później okazało się, że lewa nierówność w $(ii)_B$ w rzeczywistości jest równością. Udowodniliśmy też, że pojęcie to zgadza się z klasycznym dla $d = 1$.

Natomiast *łączny boole'owski promień spektralny* układu d operatorów $T_1,\dots,T_d$, zdefiowany jako:

$$r_B(T_1,\dots,T_d) := r_{\mathtt{cl}}(B_1^* \otimes T_1^* + \ldots + B_d^* \otimes T_d^*)$$

jest zawsze zerowy [KWys20, Proposition 11].

Łączne mmonotoniczne promienie numeryczny i spektralny zdefiniowaliśmy dla słabo monotonicznych kreacji i anihilacji M_j^*, $j = 1,\dots,d$, działających na słabo monotonicznej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{WM}(H)$ i dla bazy ortonormalnej $\{e_j \in H : \ j = 1, 2, \dots, d\}$. Wówczas definiujemy

(1) *łączny monotoniczny promień numeryczny* układu d operatorów $T_1,\dots,T_d$,

$$w_M(T_1,\dots,T_d) := w_{\mathtt{cl}}(M_1^* \otimes T_1^* + \ldots + M_d^* \otimes T_d^*)$$

(2) the *łączny monotoniczny promień spektralny* układu d operatorów $T_1,\dots,T_d$,

$$r_M(T_1,\dots,T_d) := r_{\mathtt{cl}}(M_1^* \otimes T_1^* + \ldots + M_d^* \otimes T_d^*)$$

Jawny wzór na łączny monotoniczny promień numeryczny pokazaliśmy w [KWys20, Proposition 14]:

$$w_M(T_1,\dots,T_d) = \sup\left\{ \left|\sum_{j=1}^{d} \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} \langle g_\alpha, T_j g_{j\alpha}\rangle\right| : \ g_\alpha \in \mathcal{H}, \ \sum_{\alpha\in\mathcal{M}} \|g_\alpha\|^2 = 1 \right\}$$

Tutaj $\mathcal{M}$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów słabo malejących liczb naturalnych ze zbioru $\{1, 2, \dots, d\}$ natomiast $j\alpha := (j, i_k, \dots, i_1)$ jeśli $\alpha := (i_k, \dots, i_1)$ i $j \ge i_k \ge \cdots \ge i_1$. Ponadto, w [KWys20, Lemma 1] udowodniliśmy, że dla słabo monotonicznych operatorów kreacji jest $\left\|\sum_{j=1}^{d} M_j^* \otimes T_j^*\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{d} T_j T_j^*\right\|$, z czego wynika następująca własność.

Proposition. [KWys20, Proposition 15] *Łączny monotoniczny promień numeryczny spełnia*

$(i)_M$ $w_M(T_1,\dots,T_d) = 0$ *iff* $T_1 = \cdots = T_d = 0$*;*

$(ii)_M$ *prawdziwe jest oszacowanie*

$$\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{d} T_j T_j^*\right\|^{\frac{1}{2}} \le w_M(T_1,\dots,T_d) \le \left\|\sum_{j=1}^{d} T_j T_j^*\right\|^{\frac{1}{2}};$$

$(iii)_M$ $w_M(X^*T_1X,\dots,X^*T_dX) \le \|X\|^2 w_M(T_1,\dots,T_d)$ *dla dowolnego operatora ograniczonego* $X \in B(\mathcal{H})$.

Dla łącznego monotonicznego promienia spektralnego znaleźliśmy następujący jawny wzór.

Proposition. [KWys20, Proposition 18] *Łączny monotoniczny promień spektralny spełnia*

$$r_M(T_1, \ldots, T_d) = \lim_{k\to\infty} \max_{1\le m\le d} \left\| \sum_{j=m}^{d} \sum_{\mathcal{M}_k^j} T_\alpha T_\alpha^* \right\|^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $\mathcal{M}_k^j := \{\alpha = (i_k, \ldots, i_1) \in \mathbb{N}^k : \ d \ge i_k \ge \cdots \ge i_1 = j\}$ *i* $T_\alpha := T_{i_k} \ldots T_{i_1}$.

Podaliśmy też przykład oszacowania łącznego monotonicznego promienia numerycznego dla słabo monotonicznych operatorów anihilacji [KWys20, Propositions 19, 21].

$$\frac{5}{9}\sqrt{d} \le w_M(T_1, \ldots, T_d) \le d,$$

i postawiliśmy hipotezę, że może on być proporcjonalny do $\sqrt{d}$.

Z drugiej strony, łączny monotoniczny promień spektralny dla słabo monotonicznych operatorów anihilacji spełnia

$$r_M(M_1, \ldots, M_d) = 1.$$

6. Opis osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych i popularyzujących naukę lub sztukę.

6.1. Osiągnięcia dydaktyczne.

(1) Zaprosiłem Marię Elenę Griseta z Universitá degli Studi di Bari, Włochy, do wspólnych badań, podczas jej semestralnego pobytu w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w ramach programu Erasmus w 2014-2015r. Rezultaty tej współpracy, w ramach utworzonego przeze mnie seminarium roboczego, zostały później częścią jej Rozprawy Doktorskiej.
(2) Zaprosiłem Lahcena Oussi z Université Hassan II de Casablanca, Maroko, do uczestnictwa w Studiach Doktoranckich w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, utworzyłem grupę roboczą w ramach której powstawał jego Doktorat, którego jestem oficjalnym Promotorem.

6.2. Osiągnięcia organizacyjne.

(1) 1981-1984 Byłem Przewodniczącym *Koła Naukowego Matematyków Teoretyków* w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego.
(2) 1982-1984 Byłem Przewodniczącym *Sekcji Żeglarskiej* Uniwersytetu Wrocławskiego.
(3) 1990-1995 Byłem Przewodniczącym *Koła NSZZ Solidarność* przy Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego.
(4) 2012-2016: Byłem *Prodziekanem* Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, odpowiedzialnym za Dydaktykę Matematyki i Sprawy Socjalne.
(5) 2012-2016: Byłem członkiem *Uczelnianej Komisji Rekrutacyjnej* Uniwersytetu Wrocławskiego.
(6) 2016-2020: Byłem członkiem *Uczelnianej Komisji Dyscyplinarnej dla Studentów* Uniwersytetu Wrocławskiego.
(7) 2016-2020: Byłem członkiem *Uczelnianej Komisji Dyscyplinarnej dla Nauczycieli Akademickich* Uniwersytetu Wrocławskiego.
(8) 2012-2016: Byłem Przewodniczącym *Wydziałowej Komisji do Spraw Jakości Kształcenia* Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

(9) 1998-2003: Byłem członkiem Komitetów Organizacyjnych 6 konferencji o nazwie *Non-commutative Harmonic Analysis Workshops*, które odbywały się we Wrocławiu w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego. Byłem odpowiedzialny za sprawy finansowe oraz zakwaterowanie i wyżywienie uczestników zagranicznych, głóównie z Niemiec, Japonii, także z Francji i Austrii.

(10) 2004-obecnie: Byłem członkiem (nieformalnym Przewodniczącym) Komitetu Organizacyjnego 12 Konferencji *Non-commutative Harmonic Analysis and Non-commutative Probability Workshops*, które odbywały się w Międzynarodowym Centrum Konferencyjnym Instytutu Matematycznego PAN w Będlewie, corocznie w latach 2004-2012, i co dwa lata w okresie 2014-2018. W mojej gestii było: przygotowanie formalnych zaproszeń dla uczestników zagranicznych (którzy tego potrzebowali), wszelkie sprawy finansowe, przydział zakwaterowania i decyzje dotyczące dodatkowych wydarzeń. Ponadto przygotowywałem nasze aplikacje konferencyjne, które następnie prezentowałem na posiedzeniach Komisji w Centrum Banacha IM PAN.

(11) 1990-obecnie: przygotowywałem wraz z Profesorem Markiem Bożejko, wszystkie nasze aplikacje grantowe (najpierw do MEN=Ministerstwa Edukacji Narodowej, potem KBN=Komitetu Badan Naukowych i NCN=Narodowego Centrum Nauki), jak również przygotowywałem wszystkie raporty roczne i końcowe. W szczególności uczestniczyłem w planowaniu treści merytorycznych projektów, jak również planowałem koszty i wydatki oraz opracowywałem uzyskane wyniki do sprawozdań.

(12) Byłem członkiem Komitetu Redakcyjnego publikacji w ramach Banach Center Publication 73 *Quantum probability. Proceedings of the 25th QP Conference on Quantum Probability and Related Topics held in Będlewo, June 20–26, 2004*

(13) Byłem członkiem Komitetu Redakcyjnego publikacji w ramach Banach Center Publication 78 *Non-commutative harmonic analysis with applications to probability. Papers from the 9th Workshop held in Będlewo, September 29 – October 10, 2006.*

(14) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego = IM UWr) i Nobuaki Obata (Tohoku University, Sendai, Japonia) przygotowałem aplikację, raporty roczne i końcowe do wspólnego projektu *Quantum probability and infinite dimensional analysis*, w ramach współpracy JSPS-PAN 2000-2002.

(15) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Michaelem Schürmannem (Universität Greifswald, Niemcy) przygotowałem aplikację, raporty roczne i końcowe do sieci EU Network *Quantum probability with applications to physics, information theory and biology*, contract HPRN-CT-2002-00279.

(16) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Michaelem Schürmannem (Universität Greifswald, Niemcy) przygotowałem aplikację, raporty roczne i końcowe do Wspólnego Projektu *Non-commutative harmonic analysis and quantum stochastic processes*, w ramach współpracy KBN-DAAD 2003-2004.

(17) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Quanhua Xu (Université de Franche-Comté Besancon, Francja), przygotowałem aplikację, raporty roczne i końcowe do Wspólnego Projektu *Non-commutative harmonic analysis with applications to probability*, w ramach programu POLONIUM 2007-2008.

(18) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Ewą Damek (IM UWr), brałem udział w przygotowywaniu aplikacji, raportów rocznych i końcowego, z ramienia grupy badawczej Analiza Harmoniczna węzła Uniwersytet Wrocławski w Projekcie European Commission Marie Curie Host Fellowship for the Transfer of Knowledge *Harmonic Analysis, Nonlinear Analysis and Probability*, 2005–2009, MTKD-CT-2004-013389.

(19) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Nobuaki Obata (Tohoku University, Sendai, Japonia) przygotowałem aplikację, raporty roczne i końcowe do wspólnego

projektu 2008–2009 *Non-commutative harmonic analysis on discrete structures with applications to probability*, w ramach współpracy JSPS-PAN.

(20) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Uwe Franzem (Université de Franche-Comté Besancon, Francja), przygotowałem aplikację do Wspólnego Projektu w ramach programu POLONIUM 2013-2014.

(21) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Eugene Lytvynovem (Swansea University, Wielka Brytania), przygotowałem projekt umowy o współpracy Uniwersytetu Wrocławskiego i Swansea University, w ramach Programu ERASMUS, 2014-2021.

(22) Byłem członkiem Komitetu Organizacyjnego Specjalnej Seski Naukowej z okazji 100-lecia urodzin Profesora Stanisława Hartmana, 6-7 czerwca 2014r.

(23) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM UWr) i Vitonofrio Crismale z Universitá degli Studi di Bari, Włochy, przygotowałem projekt mowy o współpracy Uniwersytetu Wrocławskiego i Uniwersytetu w Bari w ramach programu ERASMUS, 2015-2021.

(24) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM PAN) i Francesco Fidaleo (Universytet Roma II), przygotowałem projekt współpracy współpracy Uniwersytetu Wrocławskiego i Universitá degli Studi di Roma "Tor Vergata" (Włochy) w ramach programu ERASMUS 2019-2025.

(25) We współpracy z Profesorami Markiem Bożejko (IM PAN) i Franco Fagnola (Politecnico di Milano, Włochy) zorganizowałem Sesję *"Noncommutative Harmonic Analysis, Noncommutative Probability and Quantum Groups"* na Wspólnej Konferencji Unione Matematica Italiana (UMI), Societa Italiana di Matematica Applicata e Industriale (SIMAI) i Polskiego Towarzystwa Matematycznego (PTM), Wrocław, 17-20.09.2018r.

6.3. **Osiągnięcia popularyzujące naukę.**

(1) 1987 Wykłady na Szkole dla studentów matematyki w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, Michałowice (Polska).

(2) 1992-1993 Prowadziłem specjalne lekcje z matematyki, w ramach opieki IM UWr, dla uczniów klasy matematycznej w III Liceum Ogólnokształcącym we Wrocławiu.

(3) 28.03–1.04.2012r. wygłosiłem cykl odczytów pod tytułem *Zwarte grupy kwantowe* dla studentów matematyki na Szkole ABSYNT w Będlewie, zorganizowanej przez Profesora Michała Wojciechowskiego z IM PAN.

(4) 15-26.04.2013 wygłosiłem cykl wykładów *Introduction to non-commutative probability* dla studentów studiów licencjackich, magisterskich i doktorskich w Department of Mathematics, Swansea University, Swansea (Wielka Brytania), w ramach Programu ERASMUS.

(5) 7.06.2014 Wygłosiłem referat *O różnych pojęciach niezależności w probabilistyce* na Sesji Specjalnej z okazji 100-lecia urodzin Profesora Staniasława Hartmana.

(6) 26–30.10.2015 wygłosiłem cykl wykładów *Independences and central limit theorems in non-commutative probability* dla studentów studiów licencjackich, magisterskich i doktorskich w Department of Mathematics, Swansea University, Swansea (Wielka Brytania), w ramach Programu ERASMUS.

(7) 10–17.06.2017 wygłosiłem cykl wykładów *Limit theorems in non-commutative probability* dla studentów studiów licencjackich, magisterskich i doktorskich w Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi di Bari Aldo Moro, Bari (Włochy)

Bibliografia

[1] Følner, Erling; *On groups with full Banach mean value*. Math. Scand. 3 (1955), 243–254.
[2] Kesten, Harry; *Full Banach mean values on countable groups*. Math. Scand. 7 (1959), 146–156.
[3] Kesten, Harry; *Symmetric random walks on groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 336–354.
[4] Bożejko, Marek; *Uniformly amenable discrete groups*. Math. Ann. 251 (1980), no. 1, 1–6.

[5] Bożejko, Marek; *Positive definite bounded matrices and a characterization of amenable groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), no. 3, 357–360.
[6] Bożejko, Marek; *Littlewood functions, Hankel multipliers and power bounded operators on a Hilbert space.* Colloq. Math. 51 (1987), 35–42.
[7] Keller, Gordon; *Amenable groups and varieties of groups.* Illinois J. Math. 16 (1972), 257–269.
[8] Varopoulos, Nicholas Theodore; *On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory.* J. Functional Analysis 16 (1974), 83–100.
[9] Pisier, Gilles; *Joint similarity problems and the generation of operator algebras with bounded length.* Integral Equations Operator Theory 31 (1998), no. 3, 353–370.
[10] Pisier, Gilles; *The similarity degree of an operator algebra.* Algebra i Analiz 10 (1998), no. 1, 132–186; reprinted in St. Petersburg Math. J. 10 (1999), no. 1, 103–146.
[11] Pisier, Gilles; *A similarity degree characterization of nuclear C^*-algebras.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 3, 691–704.
[12] Renault, Jean; *The Fourier algebra of a measured groupoid and its multipliers.* J. Funct. Anal. 145 (1997), no. 2, 455–490.
[13] Gerasimova, Maria; Gruber, Dominik; Monod, Nicolas; Thom, Andreas; *Asymptotics of Cheeger constants and unitarisability of groups.* J. Funct. Anal. 278 (2020), no. 11, 108457
[14] Haagerup, Uffe; Steenstrup, Troels; Szwarc, Ryszard *Schur multipliers and spherical functions on homogeneous trees.* Internat. J. Math. 21 (2010), no. 10, 1337–1382.
[15] Haagerup, Uffe; Möller, Sören; *Radial multipliers on reduced free products of operator algebras.* J. Funct. Anal. 263 (2012), no. 8, 2507–2528.
[16] Serre, Jean-Pierre; *Trees.* Translated from the French by John Stillwell. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
[17] Młotkowski, Wojciech; *Positive definite radial functions on free product of groups.* Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 2 (1988), no. 1, 53–66.
[18] Ricard, Éric; Stan, Ana-Maria; *The Herz-Schur multiplier norm of sets satisfying the Leinert condition.* Colloq. Math. 124 (2011), no. 2, 255–274.
[19] Mei, Tao; de la Salle, Mikael; *Complete boundedness of heat semigroups on the von Neumann algebra of hyperbolic groups.* Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 8, 5601–5622.
[20] Ricard, Éric; Xu, Quanhua; *Khintchine type inequalities for reduced free products and applications.* J. Reine Angew. Math. 599 (2006), 27–59.
[21] Bożejko, Marek; Fendler, Gero; *Herz-Schur multipliers and completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a locally compact group.* Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 3 (1984), no. 2, 297–302.
[22] Pytlik, Tadeusz; Szwarc, Ryszard; *An analytic family of uniformly bounded representations of free groups* Acta Math. 157 (1986) 287–309.
[23] Woronowicz, Stanisław Lech; *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups.* Invent. Math. 93 (1988), no. 1, 35–76.
[24] Lance, E. Christopher; *An explicit description of the fundamental unitary for $SU_q(2)$*, Commun. Math. Phys. 164 (1994), 1–15.
[25] Zhang, Xiaoxia; Zhao, Ervin Yunwei; *The compact quantum group $U_q(2)$.* I. Linear Algebra Appl. 408 (2005), 244–258.
[26] Franz, Uwe; Skalski, Adam; Tomatsu, Reiji; *Idempotent states on compact quantum groups and their classification on $U_q(2)$, $SU_q(2)$, and $SO_q(3)$.* J. Noncommut. Geom. 7 (2013), no. 1, 221–254.
[27] Kula, Anna; *Woronowicz construction of compact quantum groups for functions on permutations. Classification result for $N = 3$.* J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), no. 2, 1673–1712.
[28] Sołtan, Piotr M. *Podleś spheres for the braided quantum $SU(2)$.* Linear Algebra Appl. 591 (2020), 169–204.
[29] Kasprzak, Paweł; Sołtan, Piotr; *Quantum groups with projection and extensions of locally compact quantum groups.* J. Noncommut. Geom. 14 (2020), no. 1, 105–123.
[30] Ricard, Éric; *The von Neumann algebras generated by $t-$Gaussians.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 2, 475–498.
[31] Speicher, Roland; *On universal products. Free probability theory* (Waterloo, ON, 1995), 257–266, Fields Inst. Commun., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
[32] Muraki, Naofumi; *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 4 (2001), no. 1, 39–58.
[33] Muraki, Naofumi; *The five independences as quasi-universal products.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 5 (2002), no. 1, 113–134.
[34] Faraut, Jacques; Koranyi, Adam;, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Univ. Press 1994.

[35] Muraki, Naofumi; *Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space.* Comm. Math. Phys. 183(3) (1997) 557–570.

[36] Hudson, Robin L.; Parthasarathy, Kalyanapuram R.; *Unification of fermion and boson stochastic calculus*, Comm. Math. Phys. 104(3) (1986) 457–470.

[37] Funar, Luis; *On the quotients of cubic Hecke algebras*, Comm. Math. Phys. 173 (1995), 513–558.

[38] Krystek, Anna Dorota; Yoshida, Hiroaki *Generalized t-transformations of probability measures and deformed con-volutions*, Probab. Math. Statist. 24(1) (2004), Acta Univ. Wratislav. 2646 (2004) 97–119.

[39] Royden, Halsey L.; *On the ideal boundary of a Riemann surface. Contributions to the theory of Riemann surfaces*, pp. 107–109. Annals of Mathematics Studies, no. 30. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.

[40] Yamasaki, Maretsugu; *Discrete Dirichlet potentials on an infinite networks*, R.I.M.S. Kokyuroku 610 (1987), 51–66.

[41] Soardi, Paolo Mao; *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes in Mathematics, 1590, Springer Verlag, Berlin, 1994.

[42] Puls, Michael J.; *The p-harmonic boundary and D_p-massive subsets of a graph of bounded degree.* Bull. Aust. Math. Soc. 89 (2014), no. 1, 149–158.

[43] Młotkowski, Wojciech; *Λ-free probability.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 7 (2004), 27–41.

[44] Bożejko, Marek; *Deformed Fock spaces, Hecke operators and monotone Fock space of Muraki.* Demonstratio Math. 45 (2012), no. 2, 399–413. (Lecture Notes 2002).

[45] Pusz, Wiesław; Woronowicz, Stanisław Lech; *Twisted second quantization.* Rep. Math. Phys. 27 (1989) 231–257.

[46] Popescu, Gelu; *Unitary invariants in multivariable operator theory.* Mem. Amer. Math. Soc. 200 (2009), no. 941.

[47] Kümmerer, Burkhard; Quantum white noise. *Infinite-dimensional harmonic analysis.* (Tübingen, 1995), 156–168, Gräbner, Tübingen, 1996

[48] Liguori, Antonio; Mintchev, Mihail; *Fock representations of quantum fields with generalized statistics.* Comm. Math. Phys. 169 (1995), no. 3, 635–652.

[49] Jørgensen, Palle E. T.; Proskurin, Daniil P.; Samoilenko, Yurii S.; *The kernel of Fock representations of Wick algebras with braided operator of coefficients.* Pacific J. Math. 198 (2001), no. 1, 109–122.

[Wys88] Wysoczański, Janusz; *On uniformly amenable groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), no. 4, 933–938.

[Wys88a] Wysoczański, Janusz; *Characterization of amenable groups and the Littlewood functions on free groups.* Colloq. Math. 55 (1988), no. 2, 261–265.

[Wys93] Wysoczański, Janusz; *An analytic family of uniformly bounded representations of a free product of discrete groups.* Pacific J. Math. 157 (1993), no. 2, 373–387.

[Wys94] Wysoczański, Janusz; *Hecke algebra on homogeneous trees and relations with Toeplitz and Hankel operators.* Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), no. 4, 1203–1210.

[Wys95] Wysoczański, Janusz; *A characterization of radial Herz-Schur multipliers on free products of discrete groups.* J. Funct. Anal. 129 (1995), no. 2, 268–292.

[Wys96] Wysoczański, Janusz; *Royden compactification of integers.* Hiroshima Math. J. 26 (1996), no. 3, 515–529.

[BWys98] Bożejko, Marek; Wysoczański, Janusz; *New examples of convolutions and non-commutative central limit theorems.* Quantum probability (Gdańsk, 1997), 95–103, Banach Center Publ., 43, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1998.

[Wys01] Wysoczański, Janusz; *A construction of compact matrix quantum groups and description of the related C^*-algebras.* Infinite dimensional analysis and quantum probability theory (Japanese) (Kyoto, 2000). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1227 (2001), 209–217.

[BWys01] Bożejko, Marek; Wysoczański, Janusz; *Remarks on t-transformations of measures and convolutions.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 37 (2001), no. 6, 737–761.

[Wys02] Wysoczański, Janusz; *Unitary representations for twisted product of matrix quantum groups.* Trends in infinite-dimensional analysis and quantum probability (Japanese) (Kyoto, 2001). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1278 (2002), 188–193.

[Wys04] Wysoczański, Janusz; *Twisted product structure and representation theory of the quantum group Uq(2).* Rep. Math. Phys. 54 (2004), no. 3, 327–347.

[Wys05] Wysoczański, Janusz; *Monotonic independence on the weakly monotone Fock space and related Poisson type theorem.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 8 (2005), no. 2, 259–275.

[Wys05a] Wysoczański, Janusz; *A d-deformation of free Gaussian random variables.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 8 (2005), no. 4, 669–680.

[Wys06] Wysoczański, Janusz; *The von Neumann algebra associated with an infinite number of t-free noncommutative Gaussian random variables.* Quantum probability, 435–438, Banach Center Publ., 73, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2006.

[Wys07] Wysoczański, Janusz; *Monotonic independence associated with partially ordered sets.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 10 (2007), no. 1, 17–41.

[Wys07a] Wysoczański, Janusz; *bm-independence and central limit theorems associated with symmetric cones.* Noncommutative harmonic analysis with applications to probability, 315–320, Banach Center Publ., 78, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007.

[Wys08] Wysoczański, Janusz; *bm-central limit theorems for positive definite real symmetric matrices.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 11 (2008), no. 1, 33–51.

[Wys09] Wysoczański, Janusz; *A generalization of the monotonic and Boolean independence of algebras and applications to probability.* Interdiscip. Inform. Sci. 15 (2009), no. 3, 389–397.

[Wys2009a] Wysoczański, Janusz; *On the Woronowicz's twisted product construction of quantum groups, with comments on related cubic Hecke algebra.* Kyoto Univ. Research Inf. Repository KURENAI, (1658), 124–135, http://hdl.handle.net/2433/140904.

[Wys10] Wysoczański, Janusz; *bm-independence and bm-central limit theorems associated with symmetric cones.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 13 (2010), no. 3, 461–488.

[Wys10a] Wysoczański, Janusz; *On a cubic Hecke algebra associated with the quantum group Uq(2).* Noncommutative harmonic analysis with applications to probability II, 323–327, Banach Center Publ., 89, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010.

[Wys10b] Wysoczański, Janusz; *Non-commutative independence of algebras and applications to probability.* Oper. Matrices 4 (2010), no. 4, 519-532.

[KWys10] Kula, Anna; Wysoczański, Janusz; *Noncommutative Brownian motions indexed by partially ordered sets.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 13 (2010), no. 4, 629–661.

[BLWys12] Bożejko, Marek; Lytvynov, Eugene; Wysoczański, Janusz; *Noncommutative Lévy processes for generalized (particularly anyon) statistics.* Comm. Math. Phys. 313 (2012), no. 2, 535–569.

[KWys13] Kula, Anna; Wysoczański, Janusz; *An example of a Boolean-free type central limit theorem.* Probab. Math. Statist. 33 (2013), no. 2, 341–352.

[SWys16] Speicher, Roland; Wysoczański, Janusz; *Mixtures of classical and free independence.* Arch. Math. (Basel) 107 (2016), no. 4, 445–453.

[KWWys17] Kula, Anna; Wojtylak, Michał; Wysoczański, Janusz; *Rank two perturbations of matrices and operators and operator model for t-transformation of probability measures.* J. Funct. Anal. 272 (2017), no. 3, 1147–1181.

[BLWys17] Bożejko, Marek; Lytvynov, Eugene; Wysoczański, Janusz; *Fock representations of Q-deformed commutation relations.* J. Math. Phys. 58 (2017), no. 7, 073501, 19 pp.

[OWys19] Oussi, Lahcen; Wysoczański, Janusz; *bm-central limit theorems associated with non-symmetric positive cones.* Probab. Math. Statist. 39 (2019), no. 1, 183–197.

[CGWys20] Crismale, Vitonofrio; Griseta, Maria Elena; Wysoczański, Janusz; *Weakly monotone Fock space and monotone convolution of the Wigner law.* J. Theoret. Probab. 33 (2020), no. 1, 268–294.

[KWys20] Kula, Anna; Wysoczański, Janusz; *Joint monotone and boolean numerical and spectral radii of d-tuples of operators.* Adv. Oper. Theory, 5 (2020), no. 3, 1039–1060.

[OWys20] Oussi, Lahcen; Wysoczański, Janusz; *Noncommutative analogues of the Law of Small Numbers for random variables indexed by elements of positive symmetric cones*, to appear in ALEA Lat. Am. J.

[50] **Quantum probability**. Proceedings of the 25th QP Conference on Quantum Probability and Related Topics held in Będlewo, June 20–26, 2004. Edited by Marek Bożejko, Wojciech Młotkowski and Janusz Wysoczański. Banach Center Publications, 73. Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 2006. 438 pp

[51] **Noncommutative harmonic analysis with applications to probability**. Papers from the 9th Workshop held in Będlewo, September 29 – October 10, 2006. Edited by Marek Bożejko, Anna Krystek, Wojciech Młotkowski and Janusz Wysoczański. Banach Center Publications, 78. Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 2007. 320 pp.