Wyprowadzenie wzoru na pochodną logarytmu.

Definicja 1 *Definiujemy funkcję* $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, *na dziedzinie* $D_E := \{a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ *jest zbieżny* $\}$.

Wykazać po kolei następujące własności funkcji E. (`uwaga: w kolejnych punktach można korzystać tylko z tych własności funkcji` E`, które zostały wykazane w punktach poprzednich.`)

---

1. Wypisać w jawnej postaci cztery pierwsze wyrazy szeregu definiującego $E(x)$. Korzystając z kryterium d'Alemberta wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ jest bezwzględnie zbieżny. Na tej podstawie wyznaczyć D_E.
2. Uzasadnić, że $E(0) = 1$ oraz że $E(x) > 0$ dla każdego $x \geq 0$.
3. Korzystając z twierdzenia Cauchyego o mnożeniu szeregów (zbieżnych bezwzględnie):
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
uzasadnić własność $E(x + y) = E(x)E(y)$.
4. Korzystając z 3 uzasadnić, że $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ a następnie wywnioskować, że także $E(x) > 0$ dla każdego $x < 0$.
5. Korzystając ze wzoru $E(x) - 1 = x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}$ pokazać, że dla $x > 0$ jest $\frac{E(x) - 1}{x} > 1$.
6. Korzystając z równości $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ uzasadnić, że dla $0 < x < 1$ jest $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = x^2(e - 2)$, a stąd
$$\frac{E(x) - 1}{x} < 1 + x(e - 2).$$
7. Na podstawie 5 i 6 wywnioskować, że istnieje granica prawostronna $\lim_{x \to 0^+} \frac{E(x) - 1}{x} = 1$. Korzystając z własności $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ pokazać, że także istnieje granica lewostronna $\lim_{x \to 0^-} \frac{E(x) - 1}{x} = 1$.
8. Na podstawie definicji pochodnej funkcji w punkcie wywnioskować, że $E(x)$ jest różniczkowalna w $x_0 = 0$ i że $E'(0) = 1$.
9. Korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie i z własności 3, 7, 8 uzasadnić, że funkcja E jest różniczkowalna (na całej dziedzinie D_E) i że dla dowolnego $x \in D_E$ jest $E'(x) = E(x)$.
10. Uzasadnić, że E jest ciągła w całej dziedzinie. Pokazać nierówność $E(x) > 1 + x$ i korzystając z niej uzasadnić, że $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$.
11. Korzystając z własności $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ pokazać, że $\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$. Korzystając z własności Darboux dla funkcji ciągłych wywnioskować, że zbiorem wartości funkcji E są wszystkie liczby dodatnie.
12. Na podstawie własności 2, 4, 3 i 9 uzasadnić, że E jest funkcją ściśle rosnącą na całej swojej dziedzinie. Wywnioskować stąd, że E jest odwracalna.
13. Niech $L(x)$ oznacza funkcję odwrotną do $E(x)$. Wyznaczyć dziedzinę D_L tej funkcji. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oraz z 9 uzasadnić, że funkcja L jest różniczkowalna na całej swojej dziedzinie oraz że $L'(x) = \frac{1}{x}$.