

W jaki sposób powstają wykresy funkcji trygonometrycznych?

Definicja 1 Funkcje trygonometryczne. Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie rzeczywistą. Na okręgu jednostkowym $U := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ wyznaczamy punkt $P(x) \in U$, dla którego długość łuku okręgu jest równa $|x|$, licząc od punktu $P(0) := (1, 0) \in U$ do punktu $P(x)$:

1. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jeśli $x > 0$,
2. zgodnie z ruchem wskazówek zegara, jeśli $x < 0$.

Definiujemy funkcje $S(x)$ oraz $C(x)$ jako **współrzędne kartezjańskie** tego punktu: $P(x) := (C(x), S(x))$.

1. Zaznaczyć na okręgu U punkty $P(0)$, $P(\frac{\pi}{2})$, $P(\pi)$, $P(\frac{3\pi}{2})$ oraz $P(2\pi)$. Podać ich współrzędne a następnie wyznaczyć wartości $S(x)$ oraz $C(x)$ dla $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.
2. Zaznaczyć na okręgu U punkty $P(\frac{\pi}{4})$, $P(-\frac{\pi}{4})$, $P(\frac{2\pi}{3})$, $P(-\frac{2\pi}{3})$. Podać ich współrzędne a następnie wyznaczyć wartości $S(x)$ oraz $C(x)$ dla $x \in \{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\}$.
3. Korzystając z nierówności $3.1 < \pi < 3.2$ pokazać, gdzie na okręgu jednostkowym leży punkt $P(12)$, który definiuje liczby $C(12)$ i $S(12)$. Zbadać, czy prawdziwa jest nierówność $S(12) > 0$.
4. Korzystając z nierówności $3,1 < \pi < 3,2$ pokazać, gdzie na okręgu jednostkowym leży punkt $P(-10)$, który definiuje liczby $C(-10)$ i $S(-10)$. Zbadać, czy prawdziwa jest nierówność $C(-10) > 0$.
5. Korzystając ze wzoru na obwód okręgu uzasadnić, że dla dowolnej liczby x punkty $P(x)$ oraz $P(x+2\pi)$ są równe: $P(x) = P(x+2\pi)$. Wywnioskować stąd, że funkcje $S(x)$ i $C(x)$ są okresowe o okresie 2π .
6. Korzystając z możliwości jednoznacznego przedstawienia dowolnej liczby rzeczywistej x w postaci $x = n + r$, gdzie $n := [x]$ – część całkowita, $r := x - [x] \in [0, 1)$, pokazać, że dla $x \in \mathbb{R}$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ oraz $x_0 \in [0, 2\pi)$ takie, że $x = 2\pi n + x_0$. Na tej podstawie pokazać, że maksymalne dziedziny D_S oraz D_C obu funkcji są równe $\mathbb{R}$.
7. Na podstawie definicji uzasadnić, że $S(x)^2 + C(x)^2 = 1$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$.
8. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby x jest $S(-x) = -S(x)$ (czyli $S(x)$ jest funkcją *nieparzystą*) oraz $C(-x) = C(x)$ (czyli $C(x)$ jest funkcją *parzystą*).
9. Porównując współrzędne punktów $P(x)$, $P(x + \frac{\pi}{2})$ oraz $P(x + \pi)$ wywnioskować, że dla dowolnej liczby $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zachodzą wzory: $S(x + \frac{\pi}{2}) = C(x)$, $S(x + \pi) = -S(x)$, $C(x + \frac{\pi}{2}) = -S(x)$ oraz $C(x + \pi) = -C(x)$.
10. Na podstawie definicji funkcji $S(x)$ wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x dla których $S(x) = 0$. Uzasadnić, że tworzą one ciąg arytmetyczny. Uzasadnić, że jest wśród nich nieskończenie wiele liczb ujemnych oraz nieskończenie wiele liczb dodatnich.
11. Na podstawie definicji funkcji $C(x)$ wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x dla których $C(x) = -1$. Uzasadnić, że tworzą one ciąg arytmetyczny. Uzasadnić, że jest wśród nich nieskończenie wiele liczb ujemnych oraz nieskończenie wiele liczb dodatnich.
12. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x które spełniają warunek $S(x) > 0$ oraz te, dla których $S(x) < 0$.
13. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x które spełniają warunek $C(x) > 0$ oraz te, dla których $C(x) < 0$.
14. Korzystając z nierówności $0 < S(x) < x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i 7 pokazać, że $1 - x^2 < C(x)^2 < 1$.
15. Na podstawie 14 wywnioskować, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)^2 = 1$. Ponieważ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ jest $C(x) > 0$, wywnioskować dalej, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = 1$. Z parzystości $C(x)$ wywnioskować, że także $\lim_{x \rightarrow 0^-} C(x) = 1$, a stąd ciągłość $C(x)$ w $x = 0$, czyli $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1 = C(0)$.

16. [Inny sposób pokazania ciągłości $C(x)$.] Dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ roważyć trójkąt $\triangle(ABD)$ o wierzchołkach $A = (1, 0)$, $B = P(x)$, $D = (C(x), 0)$. Porównać długość łuku x i długość t cięciwy łączącej punkty B i D . Używając nierówności trójkąta pokazać, że $1 - C(x) < t < x$, a stąd $1 - x < C(x)$.
 17. Na podstawie 16 wywnioskować, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = 1$. Dalej, podobnie jak w 15, uzasadnić, że $C(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} C(x)$.
 18. Korzystając z (udowodnionej) nierówności $S(x) < x < \frac{S(x)}{C(x)}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ pokazać, że istnieje granica prawostronna $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = 1$. Następnie, korzystając z 8 pokazać, że istnieje granica lewostronna $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{S(x)}{x} = 1$. Na tej podstawie, korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie uzasadnić, że funkcja $S(x)$ jest różniczkowalna w $x = 0$ oraz że $S'(0) = 1$.
 19. Korzystając ze wzoru $S(x + y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$ (którego nie trzeba dowodzić) oraz z definicji pochodnej funkcji w punkcie uzasadnić, że S jest różniczkowalna w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$. Pokazać, że $S'(x) = C(x)$.
 20. Korzystając z 13 i 20 oraz definicji funkcji $C(x)$ wyznaczyć przedziały, na których funkcja $S(x)$ ściśle rośnie, i takie, na których ściśle maleje.
 21. Korzystając ze wzoru $C(x) = S(x + \frac{\pi}{2})$ pokazać, że $C'(x) = -S(x)$.
 22. Korzystając z 12 i 22 oraz definicji funkcji $S(x)$ wyznaczyć przedziały, na których funkcja $C(x)$ ściśle rośnie, i takie, na których ściśle maleje.
 23. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $S(x)$, pokazując na okręgu U
 - (a) które punkty są stacjonarne dla S , czyli spełniają warunek $S'(x) = C(x) = 0$,
 - (b) w jaki sposób pierwsza pochodna $S'(x) = C(x)$ zmienia w nich znak.

Na tej podstawie określić rodzaj tych ekstremów oraz obliczyć wartości ekstremalne funkcji $S(x)$.
 24. Na podstawie 20 i 22 uzasadnić wzory na drugie pochodne: $S''(x) = -S(x)$ oraz $C''(x) = -C(x)$.
 25. Na podstawie 12 i 25 wyznaczyć przedziały wypukłości funkcji $S(x)$ oraz określić ich rodzaj.
 26. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji $S(x)$, pokazując na okręgu U w jaki sposób druga pochodna $S''(x)$ zmienia w nich znak - wykorzystując 25.
 27. Narysować prostą, która będzie styczną do wykresu $S(x)$ w $x = 0$ oraz sieczną łączącą punkty wykresu $(0, S(0))$ oraz $(\frac{\pi}{2}, S(\frac{\pi}{2}))$. Korzystając z nierówności $\frac{2x}{\pi} < S(x) < x$ (którą udowodniłem) oraz z wypukłości w górę funkcji $S(x)$ na przedziale $[0, \pi]$ naszkicować fragment wykresu $S(x)$ na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 28. Korzystając z własności $S(x - \pi) = -S(x)$ pokazać, że dla dowolnej liczby y jest $S(\frac{\pi}{2} - y) = S(\frac{\pi}{2} + y)$.
 29. Opisać co geometrycznie oznacza przekształcenie $\frac{\pi}{2} - y \mapsto \frac{\pi}{2} + y$ dla $y \in \mathbb{R}$:
 - (a) jaki jest punkt stały tego przekształcenia?
 - (b) jaki jest środek odcinka łączącego punkt z jego obrazem, czyli odcinka $[a - y, a + y]$?

Na tej podstawie określić jakiego rodzaju jest to symetria. Wykorzystać to do naszkicowania wykresu $S(x)$ na przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
 30. Korzystając z nieparzystości funkcji $S(x)$ dorysować część wykresu na przedziale $[-\pi, 0]$.
 31. Korzystając z okresowości funkcji $S(x)$ przedłużyć otrzymany wykres na pozostałą część osi liczbowej.
-