Ćwiczenia 3.03.2010 - omówienie zadań 1-4 z egzaminu poprawkowego.

Konwersatorium 3.03.2010 - omówienie zadań 5-8 z egzaminu poprawkowego.

Ćwiczenia 4.03.2010 (zad. 445-473) Kolokwium nr 1, 10.03.2010 (do zad. 473)

Ćwiczenia 11.03.2010 (zad. 474-499) Kolokwium nr 2, 17.03.2010 (do zad. 503)

Ćwiczenia 18.03.2010 (zad. 504-534) Kolokwium nr 3, 24.03.2010 (do zad. 538)

Ćwiczenia 25.03.2010 (zad. 539-575) Kolokwium nr 4, 31.03.2010 (do zad. 579)

1. Pochodna funkcji.
Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a.

445. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

446. Niech $f(x)=x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

447. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

448. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n, aby funkcja
$$f_n(x)=\begin{cases}|x| & \text{dla} \quad |x|\geqslant 1/n\\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad |x|<1/n\end{cases}$$
była różniczkowalna. Obliczyć f_n'. Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

Zadania **449-496** to zadania do samodzielnego rozwiązania. Na ćwiczeniach będą rozwiązane tylko zadania sprawiające kłopoty.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

Wskazówka: $A^B=e^{B\ln A}$.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

449. $3x^{33}-5x+1$ **450.** $(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ **451.** $\frac{1-x^3}{1+x^3}$ **452.** $(x^5+1)^{20}$

453. $(1+\sqrt{x})(1+x^{1/3})(1+x^{1/4})$ **454.** $\frac{x+1}{x-1}$ **455.** $\frac{x}{x^2+1}$ **456.** $(1+2x)^{30}$

457. $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1/3}$ **458.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **459.** 2^{x+3} **460.** $x10^x$ **461.** $\frac{x}{e^x}$

462. $x^2(x+1)e^x$ **463.** $e^x\ln x$ **464.** $\frac{\ln x}{e^x}$ **465.** e^{x^2} **466.** $x^{10}\ln x$

467. e^{e^x} **468.** $\ln\ln x$ **469.** $\log_{10}(x-1)$ **470.** 10^{2x-3} **471.** 2^{3^x}

472. $\log_2|\log_3(\log_5 x)|$ **473.** $e^{\sqrt{\ln x}}$ **474.** x^{x^2} **475.** x^{x^x} **476.** $x^{\sqrt{x}}$

477. $(\ln x)^x$ **478.** $e^{-x^2}\ln x$ **479.** $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ **480.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$

481. $e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$ **482.** $\ln\frac{1}{1+x}$ **483.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$ **484.** $|x|^3$

485. $\mathrm{sgn}(x)$ **486.** 0 dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **487.** $e^{-|x|}$ **488.** $\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$

489. $\{x\}$ **490.** x dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **491.** $\mathrm{sgn}(x^5-x^3)$ **492.** $\frac{\pi^{10}}{x-e}$

493. e^x dla $x<0$, $1+x$ dla $x\geqslant 0$ **494.** x^7+e^2 **495.** $(x+e)^{20}$ **496.** e^e

497. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, ze istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b, nie wiemy jednak z góry, która z liczb a,b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

(♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b$$

(♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \wedge\ b<c<a$$

(♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ a<c<b\ \vee\ b<c<a$$

(♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♣♣) $$\underset{c>0}{\exists}\ ac+b(1-c)\in Z$$

(♢♢) $$\underset{c\in[0,1]}{\exists}\ bc+a(1-c)\in Z$$

(♡♡) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(b-a)c\in Z$$

(♠♠) $$\underset{c\in(0,1)}{\exists}\ a+(a-b)c\in Z$$

(♣♣♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c}{b-a}\in(0,1)$$

(♢♢♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-b}{b-a}\in(0,1)$$

(♡♡♡) $$\underset{c\in Z}{\exists}\ \frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$$

(♠♠♠) $$\underset{c\in Z\setminus\{a\}}{\exists}\ \frac{b-a}{c-a}>1$$

498. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

(4♣) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

(5♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

(6♡) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\forall}\ \underset{s\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♠) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

499. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$f_1(3)=1,\ \ f_1(5)=2,$

$f_2(0)=3,\ \ f_2(4)=-1,$

$f_3(-5)=0,\ \ f_3(15)=10,$

$f_4(1)=2,\ \ \underset{x}{\forall} f_4'(x)\neq 1,$

$f_5(0)=0,\ \ f_5(2)=10,\ \ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$

$f_6(0)=7,\ \ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$

$f_7(3)=5,\ \ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$

$f_8(-2)=0,\ \ f_8(0)=10,\ \ f_8(3)=4,$

$f_9(-1)=0,\ \ f_9(1)=100,\ \ f_9'(3)=40,$

$f_{10}(1)=-5,\ \ f_{10}(11)=5,\ \ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$

$f_{11}(0)=0,\ \ f_{11}(100)=0,\ \ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$

$f_{12}(-100)=-100,\ \ f_{12}(100)=100,\ \ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0)\neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99)>0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=\frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1)\neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c)=13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c\neq d}{\exists}\ f_i(c)=f_i(d)=7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c)=f_i'(d)$$

Konwersatorium 10.03.2010.

500. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x)=\frac{7+\sin^4 x-\sin^2 x}{7+\cos^4 x-\cos^2 x}\,.$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.

501. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x)=W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

502. Na potrzeby tego zadania funkcję f nazwiemy **pikoróżniczkowalną** w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica

$$f^{\spadesuit}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}\,,$$

którą to granicę nazywać będziemy **pikopochodną** funkcji f w punkcie x_0.

Obliczyć pikopochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^3+3x^2$$

we wszystkich punktach jej pikoróżniczkowalności.

503. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+2xe^x-e^{2x}}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\[2ex] A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}.$$

Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

2. Pochodna funkcji - zastosowania. Znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym. Reguła de l'Hospitala.

504. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

505. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

506. $x^2+2x+21$, $[-2,7]$ **507.** $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$

508. $|x+1|+x^2$, $[-10,10]$ **509.** $|10x-1|+x^3$, $[0,1]$

510. $\ln x-\frac{x}{10}$, $[1,e^3]$ **511.** $|\sin x|+\frac{x}{2}$, $[0,2\pi]$

512. $x^{1/x}$, $[2,4]$ **513.** $3\sin x+\sin 3x$, $[0,2\pi]$

Obliczyć granice

514. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ **515.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$ **516.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

517. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-x^2-2}{x\sin x-x^2}$ **518.** $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}$ **519.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

520. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **521.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e}{x}$ **522.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

523. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ **524.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$ **525.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\ln x}{x-e}$

526. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$ **527.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^x-4}{x-2}$

528. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

529. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

530. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi+\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\}\\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Dla których A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi+\frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

531. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z}\\ x^2-2x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

532. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{7x}-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$.

Obliczyć $f'(0)$.

533. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin \mathbb{Z} \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

534. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}.$$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

Konwersatorium 17.03.2010.

535. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3)=7$$

$$2\leqslant f'(x)\leqslant 3 \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

Za podanie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz $\max(0,n-1)$ punktów.

A. $\sup\{f(6):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

B. $\inf\{f(5):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

C. $\sup\{f(2):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

D. $\inf\{f(1):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

E. $\sup\{f(9)-f(4):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

F. $\inf\{f(7)-f(0):\ f\in\mathbb{T}\}=$...................................

536. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=x^2+x-\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$$

na przedziale $\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

537. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln x$$

na przedziale $\left[\frac{1}{2},2\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

538. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=-3x+\left(x^2-6x+9\right)^{3/2}$$

na przedziale $[1,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

3. Pochodne wyższego rzędu. Wzór Taylora. Wypukłość funkcji.

Obliczyć pochodną rzędu 3 funkcji zmiennej x danej wzorem

539. $(x+1)^6$ **540.** x^6-4x^3+4 **541.** $\frac{1}{1-x}$ **542.** $x^3\ln x$ **543.** e^{2x-1}

544. $\cos x$ **545.** $(x^2+1)^3$ **546.** e^{x^2} **547.** $\ln(x^2)$ **548.** $(x-7)^{50}$

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem

549. $\ln(x^{10})$ **550.** $x\ln x$ **551.** $\sqrt{x}$ **552.** $x^2\sin x$ **553.** $\frac{1-x}{1+x}$ **554.** xe^x

555. $\sin 5x$ **556.** x^7 **557.** e^{4x} **558.** $x+\frac{1}{x}$ **559.** x^2e^{-x} **560.** $\sin^2 x$

561. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

Obliczyć przybliżone wartości następujących liczb korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacować błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

562. $\sqrt{24}$ **563.** $\sqrt[4]{e}$ **564.** $\sqrt[3]{126}$ **565.** $\sqrt[7]{126}$

566. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\sqrt{x+2}\,.$$

567. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\,.$$

568. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu Maclaurina funkcji

$$f(x)=\ln(x+e)\,.$$

569. Zbadać, w jakim przedziale jest zbieżny szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

i podać wzór na jego sumę w tym przedziale.

Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji danych wzorami:

570. x^3+2x^2+3x+4 **571.** $x^8-x^2+7x-15$ **572.** e^{-x^2}

573. $\sin^4 x$ **574.** $\sqrt{x}-\ln x$ **575.** $x^4+\sqrt[4]{x}$

Konwersatorium 24.03.2010.

576. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2010 funkcji

$$f(x)=e^x \sin\left(x\sqrt{3}\right).$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "$\sum$", "+", "−".

577. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}.$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

578. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz spełnia warunki

$$f(1)=f(2)=0$$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2} \quad \text{dla każdego} \quad x\in(0,+\infty).$$

Wyznaczyć $f(4)$.

579. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(0)=f'(0)=1$$

$$1\leqslant f''(x)\leqslant 2 \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Dobrać odpowiednie liczby C, D, a następnie:

a) Dowieść, że dla dowolnej funkcji $f\in\mathbb{T}$ zachodzi nierówność

$$C\leqslant f(1)\leqslant D.$$

b) Wskazać takie funkcje $f_1, f_2\in\mathbb{T}$, że

$$f_1(1)=C, \qquad f_2(1)=D.$$