

- Dla ustalonej liczby  $c \in \mathbb{R}$  poziomica funkcji dwóch zmiennych  $f(x, y)$  nazywamy zbiór takich punktów  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  które spełniają równanie  $f(x, y) = c$ , czyli  $P_f(c) := \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = c\}$ .
- *Uwaga: jeśli funkcja jest niezmiennicza na przekształcenie  $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  płaszczyzny (np. obrót, translację, itp.), czyli  $f(T(x, y)) = f(x, y)$  to jej wykres oraz poziomice także są niezmiennicze na to przekształcenie.*

1. Podać przykłady takich funkcji  $f(x, y)$ , że dla każdego punktu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  spełniony jest warunek:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = f(y, x) & 2) f(x, y) = f(-x, -y) & 3) f(x, y) = f(x, -y) \\ 4) f(x, y) = f(|x|, |y|) & 5) f(x, y) = f(4 - x, y) & 6) f(x, y) = f(2 - x, 3 - y) \end{array}$$

Jaki sens geometryczny ma każdy z powyższych warunków?

Z jakim przekształceniem  $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  jest on związany?

2. Dla następujących funkcji wyznaczyć: (a) dziedzinę maksymalną, (b) wszystkie niepuste poziomice oraz (c) wszystkie puste poziomice (jeśli istnieją):

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} & 2) f(x, y) = x^2 + y^2 & 3) f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \\ 4) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 5) f(x, y) = xy & 6) f(x, y) = \sin xy \\ 7) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} & 8) f(x, y) = x & 9) f(x, y) = \frac{y}{x + y} \\ 10) f(x, y) = x + y & 11) f(x, y) = x - y & 12) f(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \\ 13) f(x, y) = \frac{x}{y} & 14) f(x, y) = x^2 & 15) f(x, y) = \cos x \\ 16) f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} & 17) f(x, y) = x^2 - y^2 & 18) f(x, y) = \frac{1}{xy} \end{array}$$

3. Dla następujących funkcji opisać i naszkicować obszar będący (maksymalną) dziedziną funkcji:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}} & 2) f(x, y) = \ln(y^2 - 4x) & 3) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \\ 4) f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} & 5) f(x, y) = \ln(xy) & 6) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \end{array}$$

- Wykresem funkcji dwóch zmiennych  $f(x, y)$  jest powierzchnia w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  złożona z punktów postaci  $(x, y, f(x, y))$ , dla  $(x, y) \in D_f$  z dziedziny funkcji  $f$ .

4. Opisać i naszkicować wykresy następujących wielomianów dwóch zmiennych:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = x & 2) f(x, y) = x^2 & 3) f(x, y) = x^2 - x \\ 4) f(x, y) = y & 5) f(x, y) = y^3 & 6) f(x, y) = x^2 - y \end{array}$$

5. Opisać i naszkicować wykresy funkcji:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = x + 2y & 2) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} & 3) f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)} \\ 4) f(x, y) = |x| + |2y| & 5) f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2} & 6) f(x, y) = |x - 2y| \end{array}$$

6. Zobaczyć wykresy podanych funkcji w programie Mathematica (lub innym) i przeanalizować ich poziomice: 1)  $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$  2)  $f(x, y) = \sin x + \sin y$