ANALIZA MATEMATYCZNA 3.
LISTA ZADAŃ NR 2
GRANICE I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH.

- Definicja. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ jeśli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,y) \in D_f \qquad (\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta) \Rightarrow (|f(x,y) - c| < \varepsilon).$$

- Dla współrzędnych biegunowych: jeśli $f(r\cos t, r\sin t) = \varphi(r) \cdot g(t)$ jest funkcją rozdzielonych zmiennych biegunowych i funkcja g jest ograniczona, czyli $|g(t)| \le M$ dla $t \in [0, 2\pi)$, to warunek $\lim\limits_{r\to 0} \varphi(r) = 0$ implikuje zbieżność $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

1. Obliczyć następujące granice funkcji:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x - y + 2)$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} (2x^2 - 3xy + y^2)$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{xy}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2 + 4xy + 4y^2}{1 + y}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sin xy}{y}$ 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2}$

2. Zbadać istnienie następujących granic. Obliczyć granice tam gdzie istnieją.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^4 + y^4}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \dfrac{\ln y - \ln 3}{x - 3}$ 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} (x-3)(\ln y - \ln 3)$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{y - x^2}$ 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{y}{x^2}}$ 9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2 + y^2)$

3. Uzasadnić, że nie istnieją następujące granice:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x + y}$ 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x + y}{x^2 - y^2}$ 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$

4. Wyznaczyć punkty ciągłości oraz punkty nieciągłości następujących funkcji ($sgn(x) := \dfrac{|x|}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $sgn(0) := 0$, natomiast $[x]$ oznacza część całkowitą x).

1) $f(x,y) = sgn(x + y)$ 2) $f(x,y) = sgn(x) + sgn(y)$ 3) $f(x,y) = [x] + [y]$

4) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \ge y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$ 5) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$

5. Wyznaczyć punkty ciągłości oraz punkty nieciągłości następujących funkcji w zależności od parametru $c \in \mathbb{R}$

1) $f(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{dla } x^2 + y^2 \le 1 \\ c & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ 2) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } |x| + |y| \le 1 \\ c & \text{dla } |x| + |y| > 1 \end{cases}$

6. Zbadać dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ podana funkcja jest ciągła na dziedzinie D_f.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ |c| & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ |c| & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{tg}(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ |c| & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 4) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ |c| & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$