

ANALIZA MATEMATYCZNA 3.
LISTA ZADAŃ NR 4
PROSTA STYCZNA I PŁASZCZYZNA STYCZNA.

- Prosta $L(p_0)$ styczna do poziomuicy $P(c) \subset \mathbb{R}^2$ funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ w punkcie $p_0 = (x_0, y_0) \in P(c)$ jest określona wzorem

$$L(p_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot (y - y_0) = 0\}. \quad (0.1)$$

1. Wyznaczyć odpowiednią poziomice $P(c)$, na której leży podany punkt p_0 , a następnie, korzystając ze wzoru (0.1), wyznaczyć wzorem prostą $L(p_0)$ (styczną do $P(c)$ w punkcie p_0) w następujących przykładach:

1)	$f(x, y) = \sqrt{xy}$	$p_0 = (2, 4)$
2)	$f(x, y) = \cos xy$	$p_0 = (\frac{\pi}{3}, 2)$
3)	$f(x, y) = \ln xy$	$p_0 = (1, 3)$
4)	$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$	$p_0 = (-2, 2)$
5)	$f(x, y) = \sqrt{3 + x^2 + y^2}$	$p_0 = (2, 3)$
6)	$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$	$p_0 = (2, -1)$
7)	$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$p_0 = (3, 4)$
8)	$f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$	$p_0 = (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
9)	$f(x, y) = x^2 y^3$	$p_0 = (-1, -1)$
10)	$f(x, y) = x^2 - y^3$	$p_0 = (-3, 2)$

- Płaszczyzna $T(p_0)$ styczna do poziomuicy $P(c) \subset \mathbb{R}^3$ funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ w punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P(c)$ jest określona wzorem

$$T(p_0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \cdot (z - z_0) = 0\}. \quad (0.2)$$

2. Wyznaczyć odpowiednią poziomice $P(c) \subset \mathbb{R}^3$, na której leży podany punkt p_0 , a następnie, korzystając ze wzoru (0.2), wyznaczyć wzorem płaszczyznę $T(p_0)$ (styczną do $P(c)$ w punkcie p_0) w następujących przykładach:

1)	$f(x, y, z) = z\sqrt{xy}$	$p_0 = (2, 4, 2)$
2)	$f(x, y, z) = z \cos xy$	$p_0 = (\frac{\pi}{3}, 2, 3)$
3)	$f(x, y, z) = z \ln xy$	$p_0 = (1, 3, -1)$
4)	$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$	$p_0 = (-2, 2, -1)$
5)	$f(x, y, z) = z\sqrt{3 + x^2 + y^2}$	$p_0 = (2, 3, -1)$
6)	$f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$	$p_0 = (2, -1, -2)$
7)	$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$p_0 = (3, 4, -2)$
8)	$f(x, y, z) = \sin \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$	$p_0 = (3\pi, 4\pi, -\pi)$
9)	$f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$	$p_0 = (-1, 1, 2)$
10)	$f(x, y, z) = x^2 - y^3 + z^4$	$p_0 = (-3, 2, -2)$

- Płaszczyzna $T_f(q_0)$ styczna do wykresu

$$G(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f, \quad z = f(x, y)\}$$

funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$, w punkcie $q_0 = (p_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) \in G(f) \subset \mathbb{R}^3$, gdzie $p_0 = (x_0, y_0) \in D_f$ oraz $z_0 = f(x_0, y_0)$, jest określona wzorem

$$T_f(q_0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot (y - y_0)\}. \quad (0.3)$$

3. W poniższych przykładach wyznaczyć maksymalną dziedzinę D_f podanej funkcji $f(x, y)$. Następnie, korzystając ze wzoru (0.3) wyznaczyć płaszczyznę $T_f(q_0)$, styczną do wykresu podanej funkcji $f(x, y)$ w punkcie $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$, dla podanego punktu $p_0 = (x_0, y_0)$ (sprawdzić, czy $p_0 \in D_f$?) i $z_0 = f(x_0, y_0)$, w następujących przykładach:

- | | | |
|-----|--|--------------------------------|
| 1) | $f(x, y) = \sqrt{xy}$ | $p_0 = (2, 4)$ |
| 2) | $f(x, y) = \cos xy$ | $p_0 = (\frac{\pi}{3}, 2)$ |
| 3) | $f(x, y) = \ln xy$ | $p_0 = (1, 3)$ |
| 4) | $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ | $p_0 = (-2, 2)$ |
| 5) | $f(x, y) = \sqrt{3 + x^2 + y^2}$ | $p_0 = (2, 3)$ |
| 6) | $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ | $p_0 = (2, -1)$ |
| 7) | $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | $p_0 = (3, 4)$ |
| 8) | $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ | $p_0 = (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ |
| 9) | $f(x, y) = x^2 y^3$ | $p_0 = (-1, -1)$ |
| 10) | $f(x, y) = x^2 - y^3$ | $p_0 = (-3, 2)$ |

4. Znaleźć długość odcinka prostej $\{(2, 3, z) : z \in \mathbb{R}\}$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do tej powierzchni w punkcie $(1, 1, 2)$.
5. Wyznaczyć płaszczyznę zawierającą punkty $A = (5, 0, 0)$ i $B = (0, 8, 0)$ styczną do powierzchni
- a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ b) $z = 4 - x^2 - y^2$ c) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ d) $z = x^2$
6. Przybliżając wartości funkcji $f(x, y)$ w pobliżu punktu $(x_0, y_0) \in D_f$ punktami płaszczyzny $T(x_0, y_0)$ stycznej do wykresu f w tym punkcie otrzymamy wzór

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Korzystając z tego wzoru obliczyć w sposób przybliżony wyrażenia:

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| (1) $2,01357 \cdot 1,00245$, | (2) $3,0012 \cdot 1,0010$ | (3) $5,00454 \cdot 2,0013$ |
| (4) $\frac{3,00053}{2,00103}$ | (5) $\frac{1,0031}{2,00201}$ | (6) $\frac{2,00015}{2,00203}$. |