

1. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1, czyli $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ oraz rzędu 2, czyli $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y)$ i $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$ podanych funkcji, sprawdzając czy jest równość $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x, y) = \sqrt{xy} & 2) f(x, y) = \cos xy & 3) f(x, y) = \ln xy \\ 4) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) & 5) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} & 6) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \\ 7) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 8) f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} & 9) f(x, y) = x^2 y^3 \end{array}$$

2. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 dla funkcji:

$$1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Dla funkcji złożonej $H(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ jej **pochodne cząstkowe** są dane wzorami:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

3. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial H}{\partial u}$ oraz $\frac{\partial H}{\partial v}$ funkcji złożonej $H(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$, gdzie:

$$\begin{array}{lll} (1) f(x, y) = ye^x, & x(u, v) = u^2 + v^2, & y(u, v) = u^2 - v^2 \\ (2) f(x, y) = 2x^2 - 3y^2, & x(u, v) = u + v, & y(u, v) = uv \\ (3) f(x, y) = e^x + e^y, & x(u, v) = u^2 + v^2, & y(u, v) = u^2 - v^2 \\ (4) f(x, y) = xy, & x(u, v) = uv, & y(u, v) = u + v \\ (5) f(x, y) = xy, & x(u, v) = \sin(u + v), & y(u, v) = \cos(u - v) \\ (6) f(x, y) = xy, & x(u, v) = u - v, & y(u, v) = u + v \\ (7) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, & x(u, v) = \sin(u + v), & y(u, v) = \cos(u - v) \end{array}$$

- Dla funkcji złożonej $h(t) = f(x(t), y(t))$ jej **pochodna** jest dana wzorem:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$

4. Obliczyć pochodną $h'(t)$ jeśli $h(t) = f(x(t), y(t))$, oraz:

$$\begin{array}{lll} (1) f(x, y) = 3x^2 + 2y^3, & x(t) = \sin t, & y(t) = \cos t, \\ (2) f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, & x(t) = \cos t, & y(t) = \sin t. \\ (3) f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}, & x(t) = \sqrt{t}, & y(t) = 2t + 1, \\ (4) f(x, y) = e^{x+y}, & x(t) = \cos^2 t, & y(t) = \sin^2 t. \end{array}$$

- **Różniczką zupełną** funkcji $F(x, y)$ nazywamy wyrażenie $dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$.

5. Wyznaczyć różniczki zupełne dF dla:

$$(1) F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2) F(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 - y^4,$$

$$(3) F(x, y) = \sin xy, \quad (4) F(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

- Wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$ jeśli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

6. Znaleźć funkcję $F(x, y)$, której różniczką zupełną jest wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, gdzie:

$$(1) \quad P(x, y) = 2x - 4y, \quad Q(x, y) = -4x + y;$$

$$(2) \quad P(x, y) = 6x^2 + 3y^2, \quad Q(x, y) = 6xy - 3y^2;$$

$$(3) \quad P(x, y) = 3(x^2 - y^2), \quad Q(x, y) = -6xy + 2;$$

$$(4) \quad P(x, y) = \frac{y^2}{2x}, \quad Q(x, y) = y \ln x.$$

7. Korzystając ze wzoru $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$ obliczyć w sposób przybliżony wyrażenia:

$$(1) \frac{2,01357}{1,00245}, \quad (2) \frac{3,0012}{1,0010} \quad (3) \frac{5,00454}{2,0013}$$

$$(4) 3,00053 \cdot 2,00103 \quad (5) 1,0031 \cdot 2,00201 \quad (6) 2,00015 \cdot 2,00203.$$

W każdym z przykładów dobrać odpowiednią funkcję $f(x, y)$, wyznaczyć x_0, y_0 oraz przyrosty dx i dy .