

ANALIZA MATEMATYCZNA 3.
LISTA ZADAŃ NR 6
EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

- Punkt $(a, b) \in D_f^0$ jest *punktem stacjonarnym* funkcji $f(x, y)$ jeśli $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.
- Punkt $(a, b) \in D_f^0$ jest *punktem krytycznym* funkcji $f(x, y)$ jeśli jest punktem stacjonarnym lub jeśli któraś pochodna cząstkowa w tym punkcie nie istnieje.

1. Wyznaczyć punkty krytyczne podanych funkcji:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $f(x, y) = \sin xy$ | (2) $f(x, y) = \cos x + \cos y$ | (3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| (4) $f(x, y) = \cos xy$ | (5) $f(x, y) = \sin x + \sin y$ | (6) $f(x, y) = e^{xy}$ |
| (7) $f(x, y) = \sin(x + y)$ | (8) $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$ | (9) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ |
| (10) $f(x, y) = \cos(x - y)$ | (11) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y$ | (12) $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ |

- Niech

$$\mathbf{H}(f)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right]^2 := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

będzie wyznacznikiem Hesse (czyli hesjanem) funkcji $f(x, y)$. Jeśli (a, b) jest punktem krytycznym funkcji f , w którym istnieją obie pochodne cząstkowe, to mamy następujące możliwości:

Max. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, to f ma *lokalne maksimum* w (a, b) .

Min. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, to f ma *lokalne minimum* w (a, b) .

Siodło. Jeśli $\mathbf{H}(f)(a, b) < 0$ to (a, b) jest *punktem siodłowym* funkcji f .

2. Wyznaczyć ekstrema lokalne oraz punkty siodłowe następujących funkcji:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (1) $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$ | (2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2 - 3y^2 + 1$ |
| (3) $f(x, y) = \cos xy$ | (4) $f(x, y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$ |
| (5) $f(x, y) = \ln xy$ | (6) $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2$ |
| (7) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ | (8) $f(x, y) = \sqrt{9 - 2x^2 - 3y^2}$ |
| (9) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ | (10) $f(x, y) = x + y - 4x^2y^2$ |
| (11) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ | (12) $f(x, y) = 4 - x - y $ |
| (13) $f(x, y) = x^2y^3$ | (14) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ |
| (15) $f(x, y) = \sin^2(xy)$ | (16) $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$ |
| (17) $f(x, y) = e^{xy} - x$ | (18) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ |
| (19) $f(x, y) = 4 - x - y $ | (20) $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^2$ |
| (21) $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)^3$ | (22) $f(x, y) = y^2 + 4 - x $ |

3. Wyznaczyć punkty stacjonarne, krytyczne oraz ekstrema lokalne oraz punkty siodłowe podanych funkcji:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $f(x, y) = \sin xy$ | (2) $f(x, y) = \cos x + \cos y$ | (3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| (4) $f(x, y) = \cos xy$ | (5) $f(x, y) = \sin x + \sin y$ | (6) $f(x, y) = e^{xy}$ |
| (7) $f(x, y) = \sin(x + y)$ | (8) $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$ | (9) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ |
| (10) $f(x, y) = \cos(x - y)$ | (11) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y$ | (12) $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ |

4. Liczbę dodatnią $a \in \mathbb{R}$ przedstawić w postaci sumy dwóch składników dodatnich $a = x + y$ ($x, y > 0$) tak aby w każdym z przypadków iloczyn tych składników był największy.

5. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu 3, czyli $\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}$ oraz $\frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}$, dla funkcji:

(1) $f(x, y) = e^{xy}$

(2) $f(x, y) = \cos xy$

(3) $f(x, y) = e^{xy} \sin xy$

(4) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

(5) $f(x, y) = \sin x \sin y$

(6) $f(x, y) = \cos x \cos y$

(7) $f(x, y) = x^4 y^5$

(8) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$