

- Punkt $P = (a, b, c) \in D_f^0$ jest *punktem stacjonarnym* funkcji $f(x, y, z)$ jeśli $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$, natomiast jest *punktem krytycznym* tej funkcji jeśli jest punktem stacjonarnym lub jeśli któraś pochodna cząstkowa w tym punkcie nie istnieje.

1. Wyznaczyć punkty krytyczne podanych funkcji oraz określić które z nich są a które nie są stacjonarne:

- | | |
|---|---|
| (1) $f(x, y, z) = \sin xyz$ | (2) $f(x, y, z) = \cos xyz$ |
| (3) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | (4) $f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z$ |
| (5) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$ | (6) $f(x, y, z) = e^{xyz}$ |
| (7) $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$ | (8) $f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$ |
| (9) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ | (10) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ |

- Macierzą Hesse (czyli hesjanem) funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ w punkcie wewnętrznym dziedziny $P := (a, b, c) \in D_f^0$ nazywamy macierz pochodnych cząstkowych rzędu dwa funkcji f :

$$\mathbf{H}_f(P) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) \end{bmatrix}$$

Minory główne tej macierzy oznaczamy:

$$\Delta_1(P) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P), \quad \Delta_2(P) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{vmatrix}, \quad \Delta_3(P) := \det(H_f(P)).$$

Jeśli $P = (a, b, c) \in D_f^0$ jest punktem stacjonarnym funkcji f , w którym istnieją (i są ciągłe) jej pochodne cząstkowe rzędu 2, to wówczas mamy następujące możliwości:

- Jeśli $\Delta_1(P) > 0$, $\Delta_2(P) > 0$ i $\Delta_3(P) > 0$, to f ma *lokalne **minimum*** w punkcie P .
- Jeśli $\Delta_1(P) < 0$, $\Delta_2(P) > 0$ i $\Delta_3(P) < 0$, to f ma *lokalne **maksimum*** w punkcie P .

2. Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

- | | |
|---|---|
| (1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ | (2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - yz$ |
| (3) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$ | (4) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 - yz + z$ |
| (5) $f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z$ | (6) $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$ |
| (7) $f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$ | (8) $f(x, y, z) = x^2(1 - x^2) + y^2 + z(1 - z)$ |
| (9) $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ | (10) $f(x, y, z) = x - x^2 + y - y^2 + z - z^2$ |
| (11) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ | (12) $f(x, y, z) = x^2 - x^4 + y^2 - y^4 + z^2 - z^4$ |