

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA ZADAŃ NR 7
EKSTREMA WARUNKOWE FUNKCJI DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH
I MNOŻNIKI LAGRANGE'A.

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y)$ na podanym zbiorze:

- (1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0), (-3, 0), (0, -3)$
- (2) $f(x, y) = 2xy$ na kole jednostkowym o środku $(0, 0)$
- (3) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ na kole o środku $(0, 0)$ i promieniu 2,
- (4) $f(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ na maksymalnej dziedzinie,
- (5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 4y$ na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0), (-3, 0), (0, -3)$
- (6) $f(x, y) = x^6 + y^6 + xy$, $D_f = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- (7) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4 \arctan(xy)$, $D_f = [0, 10] \times [0, 10]$
- (8) $f(x, y) = \frac{1}{2+xy} + \frac{x}{8}$, $D_f = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- (9) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $D_f = [0, 10] \times [0, 10] \cap \{x + 8y \geq 9\}$
- (10) $f(x, y) = (x-1)^2 + \frac{16}{9}(y-2)^2$, $x \in [0, 2], 0 \leq y \leq x^2$

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y)$ na podanym zbiorze:

- (1) $f(x, y) = |x| + |y - 2|$, $D_f = \mathbb{R}^2$
- (2) $f(x, y) = |x + y - 3| + |y - 2|$, $D_f = [-5, 5] \times [-5, 5]$
- (3) $f(x, y) = |x| + (x + y)^2 + \frac{3y}{2}$, $D_f = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- (4) $f(x, y) = |x - 3| + |y - 2|$, $D_f = [-5, 5] \times [-5, 5]$
- (5) $f(x, y) = |x + y - 3| + |y - 2|$, $D_f = [-5, 5] \times [-5, 5]$

3. Metodą mnożników Lagrange'a wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y)$ przy podanym warunku:

- (1) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ $x^2 + y^2 = 4$, (2) $f(x, y) = x^3 + x^2 + \frac{y^2}{3}$ $x^2 + y^2 \leq 36$,
- (3) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ $x^2 + y^2 \leq 4$, (4) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ $x - y = \frac{\pi}{4}$,
- (5) $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ $x^4 + 2y^4 \leq 1$, (6) $f(x, y) = xy$ $2x^2 + y^2 \leq 4$,
- (7) $f(x, y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 7$ $2x^2 + \frac{3y^2}{2} = \frac{3}{2}$, (8) $f(x, y) = xy$ $x^2 + y^2 = 32$.

4. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z)$ przy podanych warunkach:

- (1) $f(x, y, z) = 3z - x - 2y$, gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$,
- (2) $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$, gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
- (3) $f(x, y, z) = 3z - x - 2y$, gdy $x^2 + 4y^2 - z = 0$, $x - y = 0$,
- (4) $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$, gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 0$,
- (5) $f(x, y, z) = xyz$, gdy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$,
- (6) $f(x, y, z) = xyz$, gdy $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$

5. W jaki sposób należy przedstawić liczbę dodatnią w postaci sumy trzech składników tak, aby ich iloczyn był największy?

6. Na płaszczyźnie $3x - 2z = 0$ znaleźć taki punkt, aby suma kwadratów jego odległości od punktów $A = (1, 1, 1)$ i $B = (2, 3, 4)$ była najmniejsza.

7. Wyznaczyć taki punkt płaszczyzny $z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $A_1 = (1, 2, 1)$, $A_2 = (1, 3, 4)$, $A_3 = (-1, 2, 2)$, $A_4 = (0, 2, 3)$ oraz $A_5 = (5, 1, 5)$ jest najmniejsza.

8. Na powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ znaleźć taki punkt S , aby dla $A = (4, 0, 4)$, $B = (4, 4, 4)$ i $C = (4, 4, 0)$ objętość ostrosłupa $SABC$ była

- (a) największa
- (b) najmniejsza

9. Jaką największą objętość może mieć prostopadłościan wpisany w kulę o promieniu R ?