

1. Sprawdzić, czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu podanych punktów:

- (1) $x^y - y^x = 0$, $A = (2, 4)$, $B = (e, e)$, $C = (3, 3)$,
 (2) $x^4 + y^2 - 2xy = 0$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, -1)$,
 (3) $x^3 + y^3 - 2xy^2 = 0$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, -1)$,
 (4) $x^4 + y^4 - 2xy = 0$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, -1)$.

2. Sprawdzić, czy podane równanie określa jednoznacznie funkcję uwikłaną $z = z(x, y)$ w otoczeniu podanych punktów:

- (1) $x^2z + yz^2 = 2$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (\sqrt{2}, 0, 1)$ (2) $e^{xz} = yz$, $A = (0, 1, 1)$.

3. Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej w podanych punktach:

- (1) $x^3 - y^3 + x - y = 0$, $A = (2, 2)$, $B = (t, t)$ (2) $x^2 + y^2 = 3xy - x$, $A = (1, 1)$, $B = (0, 0)$
 (3) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1$, $A = (1, 2)$, $B = (0, 1)$.

4. Obliczyć pochodną $\frac{dy}{dx}$ oraz drugą pochodną $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem:

- (1) $xe^y = y - 1$, (2) $\ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 2xy$,
 (3) $x^2 + y^2 = 3xy$, (4) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$.

5. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego dla funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$:

- (1) $\cos(x + y + z) = x + y + z$ (2) $z^2 = xy$ (3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

6. Wyznaczyć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanej równaniem uwikłanym

- (1) $x^2 + y^2 + 4y = xy + 2x$ (2) $(x - y)^2 = y + xy - 3x$ (3) $x^5 + y^4 = 4xy^2$
 (4) $x^3 + y^2 = 12xy$ (5) $x^4 + y^4 = 2xy$.

7. Wyznaczyć ekstrema funkcji dwóch zmiennych $z = z(x, y)$ zadanej równaniem uwikłanym

- (1) $x^2 + y^2 + x + yz = 0$ (2) $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.

- Wzór Taylora dla funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) : $f(x, y) = p_N(x, y) + R_N(s, t)$, (s pomiędzy x_0 i x , t pomiędzy y_0 i y), gdzie $R_N(x, y)$ jest N -tą resztą a $p_N(x, y)$ jest N -tym wielomianem Taylora danym wzorem

$$p_N(x, y) := f(x_0, y_0) + \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^n \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, y_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{(y - y_0)^{n-k}}{(n - k)!}$$

8. Napisać wzorem ogólnym drugi wielomian Taylora $p_2(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) .

9. Wyznaczyć drugi wielomian Taylora w punkcie $(0, 0)$ funkcji $f(x, y)$ danej wzorem:

- (1) $f(x, y) = e^x \sin y$ (2) $f(x, y) = e^{xy}$ (3) $f(x, y) = x^3 e^{y^2}$

10. Wyznaczyć przybliżoną wartość liczby a biorąc

- (a) pierwszy wielomian Taylora $p_1(x_0, y_0)$ (b) drugi wielomian Taylora $p_2(x_0, y_0)$.

w odpowiednim punkcie (x_0, y_0) dla odpowiednio dobranej funkcji $f(x, y)$:

- (1) $a = \sqrt{6,02^2 + 8,01^2}$ (2) $a = \sqrt{5,99^2 + 8,01^2}$ (3) $a = \sqrt{5,98^2 + 7,99^2}$
 (4) $a = \frac{8,04}{2,02}$ (5) $a = \frac{2,02}{8,04}$ (6) $a = \frac{2,01 \cdot 1,03}{2,01^2 - 1,03^2}$
 (7) $a = \frac{2,03 \cdot 1,01}{2,03^2 - 1,01^2}$ (8) $a = \frac{2,003 \cdot 1,01}{2,003^2 - 1,01^2}$ (9) $a = 1,02^{3,01}$

Porównać wyniki (a) i (b).