

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA ZADAŃ NR 9a
CAŁKI PODWÓJNE

Podziałem prostokąta $D = [a, b] \times [c, d]$ nazywamy zbiór punktów

$$\mathcal{P} := \{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1, a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\}$$

Oznaczamy $p_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Delta p_{ij} := \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ gdzie $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j := y_{j+1} - y_j$.

Sumą dolną funkcji $f(x, y)$ dla podziału $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę $L_f(\mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} \cdot \Delta p_{ij}$, gdzie dla $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$ określamy $m_{ij} := \inf_{(x,y) \in p_{ij}} f(x, y)$.

Sumą górną funkcji $f(x, y)$ dla podziału $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę $U_f(\mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} \cdot \Delta p_{ij}$, gdzie dla $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$ określamy $M_{ij} := \sup_{(x,y) \in p_{ij}} f(x, y)$.

Sumą Riemanna funkcji $f(x, y)$ dla podziału $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę $R_f(\mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(s_i, t_j) \cdot \Delta p_{ij}$, gdzie dla $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$ liczby $s_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $t_j \in [y_j, y_{j+1}]$ są dowolne.

Jeśli te granice istnieją i są równe, to taką liczbę oznaczamy $\iint_D f(x, y) d\omega$.

1. Dla funkcji $f(x, y)$, zadanej na podanym prostokącie $D = [a, b] \times [c, d]$ i dla podziału

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) \in D : \Delta x_i = \frac{b-a}{m}, \Delta y_j = \frac{d-c}{n}, 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\}$$

(a) sumę dolną $L_f(\mathcal{P})$

(b) sumę górną $U_f(\mathcal{P})$

(c) sumę Riemanna $R_f(\mathcal{P})$ dla $s_i = x_i$, $t_j = y_j$

(d) sumę Riemanna $R_f(\mathcal{P})$ dla s_i, t_j będących środkami przedziałów: $s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ oraz $t_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x, y) = x + y$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$ | (2) $f(x, y) = x + y$, $D = [-1, 0] \times [0, 1]$ |
| (3) $f(x, y) = x + y$, $D = [0, 1] \times [-1, 0]$ | (4) $f(x, y) = x + y$, $D = [-1, 0] \times [-1, 0]$ |
| (5) $f(x, y) = xy$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$ | (6) $f(x, y) = xy$, $D = [-1, 0] \times [0, 1]$ |
| (7) $f(x, y) = xy$, $D = [0, 1] \times [-1, 0]$ | (8) $f(x, y) = xy$, $D = [-1, 0] \times [-1, 0]$ |
| (9) $f(x, y) = [x] + [y]$, $D = [0, 1] \times [1, 2]$ | (10) $f(x, y) = [x + y]$, $D = [0, 1] \times [1, 2]$ |

2. Obliczyć całkę $\iint_D \operatorname{sgn}(y - x) d\omega$ dla: (a) $D = [-2, 2] \times [-2, 2]$ oraz (b) $D = [-1, 2] \times [2, 4]$.

- Jeśli $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ jest obszarem ograniczonym (od góry i od dołu) wykresami funkcji $g_1(x) \leq g_2(x)$ dla $a \leq x \leq b$, to całka podwójna wyraża się wzorem

$$\iint_D f(x, y) d\omega = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

3. Obliczyć następujące całki po obszarze, który jest półkolem $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$:

a) $\iint_D xy d\omega$ b) $\iint_D x - y d\omega$ c) $\iint_D x^2 + y^2 d\omega$ d) $\iint_D x^2 - y^2 d\omega$ e) $\iint_D xy^2 d\omega$.

- Jeśli $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ jest obszarem ograniczonym (z lewej i z prawej strony) wykresami funkcji $h_1(y) \leq h_2(y)$ dla $c \leq y \leq d$, to całka podwójna wyraża się wzorem

$$\iint_D f(x, y) d\omega = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

4. Obliczyć następujące całki po obszarze D który jest

1. trójkątem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $y = 2 - x$
2. trójkątem ograniczonym prostymi $y = 0$, $y = x$ i $y = 2 - x$

a) $\iint_D xy d\omega$ b) $\iint_D x + y d\omega$ c) $\iint_D x^2 + y^2 d\omega$ d) $\iint_D x^2 - y^2 d\omega$ e) $\iint_D x^2 y^2 d\omega$.

- *Współrzędne biegunowe* na płaszczyźnie kartezjańskiej są dane wzorami $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, gdzie $r \geq 0$, $t \in [0, 2\pi)$; wówczas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zamiana zmiennych kartezjańskich (x, y) na biegunowe (r, t) zmienia obszar D w nowy obszar $\Omega = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : (r \cos t, r \sin t) \in D\}$

5. Wyznaczyć obraz Ω obszaru D przy zamianie zmiennych kartezjańskich na biegunowe, dla D określonego jako:

- a) sektor pierwszej ćwiartki poniżej prostej $y = x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 16$
 - b) sektor pierwszej ćwiartki powyżej prostej $y = x\sqrt{3}$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 16$
 - c) sektor drugiej ćwiartki powyżej prostej $y = -x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 9$
 - d) sektor drugiej ćwiartki poniżej prostej $y = \frac{-x}{\sqrt{3}}$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 9$
 - e) sektor trzeciej ćwiartki poniżej prostej $y = x$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 4$
 - f) sektor czwartej ćwiartki powyżej prostej $y = -x\sqrt{3}$, ograniczony łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 4$
-

- Zamiana zmiennych kartezjańskich na współrzędne biegunowe w całce podwójnej:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} F(r, t) r dr dt, \text{ gdzie } F(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$$

6. Korzystając ze współrzędnych biegunowych obliczyć następujące całki podwójne

a) $\iint_D xy d\omega$ b) $\iint_D x^2 + y^2 d\omega$ c) $\iint_D x^2 - y^2 d\omega$ d) $\iint_D x + y d\omega$, e) $\iint_D x^2 y^2 d\omega$.

dla obszarów D określonych następująco:

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, y\}$
 2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$
 3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq -y\}$
-