

1. Dla funkcji

- $f(x, y) = [x]$,
- $f(x, y) = [x] + [y]$
- $f(x, y) = x + y$,

zadanych na prostokącie $D = \left[0, \frac{5}{2}\right] \times [1, 3]$ i dla podziału $\mathcal{P}$ na mn jednakowych prostokątów P_{ij} o polach Δp_{ij} ($=?$), niech $(x_i, y_j) \in P_{ij}$ będą środkami tych prostokątów, $m_{ij} = \inf_{(x,y) \in P_{ij}} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup_{(x,y) \in P_{ij}} f(x, y)$, dla $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$. Obliczyć

- sumy Riemanna $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) \Delta p_{ij}$,
- sumę górną Darboux $U_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_{ij} \Delta p_{ij}$,
- sumę dolną Darboux $L_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n m_{ij} \Delta p_{ij}$,

przyjmując następujące wartości

- $m = 25$ oraz $n = 20$
- $m = \frac{5}{2} \cdot 10^k$ oraz $n = 2 \cdot 10^k$ i obliczyć granicę tych sum dla $k \rightarrow \infty$.

2. Dobrać odpowiednio (wygodnie) podział $\mathcal{P}$ dla którego $|U_f(\mathcal{P}) - L_f(\mathcal{P})| \leq 10^{-6}$, jeśli funkcja jest zadana na prostokącie D podanym wzorem

- a) $f(x, y) = [2x] + [y]$, $D = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$
- b) $f(x, y) = [2x] + [y]$, $D = [0, 4] \times [0, 4]$
- c) $f(x, y) = [2x] + [y]$, $D = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- d) $f(x, y) = |x|$, $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- e) $f(x, y) = |x|$, $D = [-1, 3] \times [-\pi, \sqrt{2}]$
- f) $f(x, y) = [x - \sqrt{2}] + [y]$, $D = [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 5] \times [2, 7]$
- g) $f(x, y) = [x - \sqrt{2}] + [y]$, $D = [2, 4] \times [2, 4]$
- h) $f(x, y) = \left[\frac{x}{\pi}\right] + \left[\frac{y}{\pi}\right]$, $D = [1, 4] \times [2, 8]$
- h) $f(x, y) = \left[\frac{x+y}{\pi}\right]$, $D = [1, 4] \times [2, 8]$

3. Proste $y = \pm x + \frac{n}{3}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, określają podział $\mathcal{P}$ trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Wyznaczyć

- (a) ile w $\mathcal{P}$ jest kwadratów i jakie mają pola,
- (b) ile jest w nim trójkątów i jakie mają pola,

oraz obliczyć $U_f(\mathcal{P})$ i $L_f(\mathcal{P})$ dla $f(x, y) = (x + y)^2$.

4. Sprawdzić które z podanych całek można obliczyć bez całkowania:

- a. $\iint_{[0,1]^2} 2x + 3y d\omega$ b. $\iiint_{[0,1]^2} e^{[x+y]} d\omega$ c. $\iint_{[-1,1]^2} e^{[x+y]} d\omega$
- d. $\iint_{[0,1]^2} x^2 y^3 d\omega$ e. $\iint_{[-1,1]^2} x^2 y^3 d\omega$ f. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^3 d\omega$
- g. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\omega$ h. $\iint_{[-1,1]^2} |x + y| d\omega$ i. $\iint_{[-3,3]^2} |x - y| d\omega$

5. Obliczyć całki iterowane

- a. $\int_2^4 \int_3^7 y \ln x \, dx dy$ b. $\int_0^{2\pi} \int_1^e (x \ln x)(\sin y) \, dx dy$
- c. $\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y} \, dx dy$ d. $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin^2(xy) \, dx dy$.

Określić od jakich całek podwójnych one pochodzą.

6. Obliczyć podane całki podwójne po podanym obszarze D :

- (a) $\iint_D e^x \, d\omega$, D -trapez o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$,
- (b) $\iint_D xy \, d\omega$, D -trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$,
- (c) $\iint_D x^3 \, d\omega$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$,
- (d) $\iint_D x^2 + y \, d\omega$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \quad x + y \leq 1\}$,
- (e) $\iint_D 2x^2 + y^2 \, d\omega$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$,
- (f) $\iint_D x^2 \, d\omega$, D -czworokąt krzywoliniowy o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(8, 1)$, $(-2, -2)$, ograniczony krzywymi $y = x^2$ i $xy = 8$ oraz dwoma odcinkami,
- (g) $\iint_D \sqrt{y} \, d\omega$, D -obszar ograniczony parabolą $y = x^2$ i prostą $y = x + 6$,
- (h) $\iint_D |x^2 - y| \, d\omega$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$,
- (i) $\iint_D 4 + x^2 \, d\omega$, D -obszar ograniczony liniami $y = 1 + x^2$ i $y = 9 - x^2$