

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA ZADAŃ NR 10
CAŁKI POTRÓJNE I ICH ZASTOSOWANIA.

1. Obliczyć następujące całki iterowane

a) $\int_4^6 \int_1^2 \int_2^3 x + 2y + 3z \, dx dy dz$, b) $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xy + z \, dx dy dz$

- Jeśli $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y), (x, y) \in R\}$ to

$$\iiint_D f(x, y, z) d\Omega = \iint_R \left(\int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} dz \right) d\omega$$

2. Obliczyć następujące całki potrójne po podanym obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$

a) $\iiint_D x^2 + y \, d\Omega$, $D\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

b) $\iiint_D x + y + z \, d\Omega$, $D\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

- Współrzędne sferyczne $(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \varphi$ dla $\rho > 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Jakobian: $\rho^2 \sin \varphi$.

3. Obliczyć następujące całki, po podanym obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$, korzystając ze współrzędnych sferycznych:

(a) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d\Omega$, gdzie D jest ograniczony przez powierzchnię $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

(b) $\iiint_D z \, d\Omega$, gdzie D jest ograniczony przez powierzchnie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ i $(0, 0, 1) \in D$.

(c) $\iiint_D \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2} \, d\Omega$, gdzie D jest ograniczony przez powierzchnie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z^2 = x^2 + y^2$ oraz $(1, 0, 0) \in D$.

(d) $\iiint_D (x^2 + y^2) \, d\Omega$, gdzie D jest ograniczony przez powierzchnie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ oraz $(0, 0, 1) \in D$.

(e) $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} \, d\Omega$, gdzie D jest ograniczony przez powierzchnię $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. Obliczyć objętość podanej bryły $D \subset \mathbb{R}^3$ ograniczonej przez powierzchnie:

(a) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

(b) $z = x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

(c) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

- Masa bryły o gęstości $\rho(x_1, x_2, x_3)$ na dziedzinie $D \subset \mathbb{R}^3$: $M = \iiint_D \rho(x_1, x_2, x_3) d\Omega$, a współrzędne środka masy $s_i = \frac{1}{M} \iiint_D x_i \rho(x_1, x_2, x_3) d\Omega$, dla $i = 1, 2, 3$.

5. Wyznaczyć masę oraz środek masy bryły D o jednorodnej gęstości $\rho(x, y, z) \equiv a$, jeśli

- (a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq z, z \leq 1, y^2 \leq 1\}$;
- (b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x \leq y \leq x\sqrt{3}\}$;
- (c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;
- (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$;
- (e) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z\}$;
- (f) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$;

6. Obliczyć masę piramidy o wysokości 3 i podstawie 2, jeśli gęstość jest proporcjonalna do:

- (a) kwadratu odległości od wierzchołka i przy podstawie jest równa 7,
- (b) kwadratu odległości od podstawy i w górnym wierzchołku jest równa 1,
- (c) do czwartej potęgi odległości od środka podstawy i w wierzchołku jest równa 1.