

- *Całką krzywoliniową pierwszego rodzaju* po krzywej (niezorientowanej) L nazywamy wyrażenie $\int_L f(x, y) ds$, którą definiujemy jako granicę sum postaci $\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i) \Delta s_i$, gdzie Δs_i jest długością łuku fragmentu krzywej L pomiędzy punktami P_i oraz P_{i+1} , a $P_0, P_1, \dots, P_n \in L$ są punktami podziału krzywej.

- Jeśli krzywa L jest zadana parametrycznie jako $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ dla $a \leq t \leq b$, to

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- Jeśli krzywa L jest wykresem funkcji $y = y(x)$ na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

1. Obliczyć całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju $\int_L f(x, y) ds$ po krzywej L w następujących przypadkach:

- a) $f(x, y) = xy$, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ dla $a, b > 0$.
- b) $f(x, y) = y$, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2x\}$ dla $0 \leq x \leq 1$
- c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ dla $0 < a \leq x \leq b$

- Jeśli $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są funkcjami określonymi na krzywej *zorientowanej* C , łączącej punkt A z punktem B na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ to *całką (ogólną) krzywoliniową drugiego rodzaju* (po tej krzywej) nazywamy wyrażenie

$$\int_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \lim_n \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i)$$

- Jeśli krzywa C jest zamknięta i zorientowana dodatnio, to całkę po niej oznaczamy $\oint_C$.
- Jeśli $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ jest parametryzacją krzywej C , dla $a \leq t \leq b$, to

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)] dt$$

2. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną (drugiego rodzaju) $\int_C 2xy dx + x^2 dy$, jeśli C jest krzywą łączącą punkt $A = (0, 0)$ z punktem $B = (1, 1)$ opisaną wzorem

- (1) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, (2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$,
- (3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$, (4) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.

3. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną (drugiego rodzaju) $\int_C xy dx + (y - x) dy$, jeśli C jest krzywą łączącą punkt $A = (0, 0)$ z punktem $B = (1, 1)$ opisaną wzorem

- (1) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, (2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$,
- (3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$, (4) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.

4. Obliczyć całki $\oint_C (-y dx + x dy)$ dla krzywej C zamkniętej zorientowanej dodatnio, określonej w następujący sposób:
- C jest brzegiem trójkąta ograniczonego prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$;
 - C jest brzegiem trójkąta ograniczonego prostymi $y = 0$, $y = x + 1$ i $y = -x + 1$;
 - C jest brzegiem kwadratu ograniczonego prostymi $|x| + |y| = 1$;
 - C jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu $r = 4$;
5. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\int_C (x dy - y dx)$ po łuku paraboli $y = x^2$, od punktu $A = (0, 0)$ do punktu $B = (2, 4)$.
6. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\int_C ((x + y) dx + (x - y) dy)$ po łuku paraboli $y = x^2$, od punktu $A = (-1, 1)$ do punktu $B = (1, 1)$.
-

- **Wzór Greena:** Jeśli krzywa zamknięta C , zorientowana dodatnio, jest brzegiem obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}^2$ i funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi, to

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

7. Obliczyć prawą i lewą stronę wzoru Greena dla funkcji $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ oraz $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, i obszaru $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
8. Obliczyć prawą i lewą stronę wzoru Greena dla funkcji $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ oraz $Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, i obszaru $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
-

- Ze wzoru Greena wynika że pole obszaru D , ograniczonego krzywą zamkniętą C , zorientowaną dodatnio, jest równe: $|D| = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy) = \oint_C -y dx = \oint_C x dy$.

9. Obliczyć pole obszaru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 4\}$.
10. Obliczyć pole D obszaru ograniczonego krzywą C zadaną parametrycznie wzorami $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = b \sin^3 t$, $a, b > 0$.
-