MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 01 – LICZBY ZESPOLONE.

1. Korzystając z definicji $\mathbf{i}^2 = -1$ wyznaczyć kolejne potęgi jednostki urojonej $\mathbf{i}$, czyli liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Wyznaczyć wszystkie możliwe postacie trygonometryczne jednostki urojonej $\mathbf{i}$.

3. Wyznaczyć moduły oraz wszystkie możliwe argumenty liczb zespolonych z dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ d) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = -1 = -1 + 0\mathbf{i}$
   f) $z = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2}$ g) $z = 2 + 2\mathbf{i}$ h) $z = 2 - 2\mathbf{i}$ i) $z = -3 - 3\mathbf{i}$ j) $z = -1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$

- Liczba zespolona $w = c + d\mathbf{i}$ nazywa się *odwrotną* do $z = a + b\mathbf{i}$ jeśli spełnia warunek $z \cdot w = 1$; czyli jeśli $(ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i} = 1 + 0\mathbf{i}$.

4. Wyznaczyć liczbę odwrotną do liczby zespolonej z dla

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ d) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = 1 + 2\mathbf{i}$ f) $z = 2 - 3\mathbf{i}$

5. Wyznaczyć (i narysować na płaszczyźnie) zbiór liczb zespolonych z spełniających równanie:

   a) $|z - 1| = 1$ b) $|z + 2 - \mathbf{i}| = 3$ c) $|z - 1| = |z + 1|$ d) $|z + 4 - 2\mathbf{i}| = 3$ e) $|z - \bar{z}| = 2$

   wskazówka: wyrażenie $|z - w|$ jest odległością liczb zespolonych z i w.

- Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej $z = r_1(\cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1)$, $w = r_2(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2)$ jest dane wzorem $zw = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

6. Wykonać mnożenie następujących liczb zespolonych $z, w \in \mathbb{C}$, przedstawiając je w postaci trygonometrycznej, dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i},\ w = 2 - 2\mathbf{i}$, b) $z = 3 - 3\mathbf{i}\sqrt{3},\ w = 2 + 2\mathbf{i}$, c) $z = 1 - \mathbf{i},\ w = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$

- Potęgowanie (wzór de Moivre'a:) jeśli $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ to $z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi)$

7. Wyznaczyć potęgi z^n liczby zespolonej z dla:

   a) $z = 1 + \mathbf{i}$ b) $z = 1 - \mathbf{i}$ c) $z = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ a) $z = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ e) $z = 2 - 2\mathbf{i}\sqrt{3}$ f) $z = -2\sqrt{3} - 2\mathbf{i}$

- Pierwiastkiem zespolonym stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w, która spełnia równanie $w^n = z$. Jeśli $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ jest w postaci trygonometrycznej, to każdy pierwiastek stopnia n wyraża się wzorem $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

8. Wyznaczyć pierwiastki stopnia $n = 3$ z liczby zespolonej z, dla:

   (1) $z = 1$, (2) $z = -1$, (3) $z = 16\mathbf{i}$, (4) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (5) $z = -1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$,
   (6) $z = 1 - \mathbf{i}$, (7) $z = -1 + \mathbf{i}$, (8) $z = -1 - \mathbf{i}$, (9) $z = -8 + 8\mathbf{i}$, (10) $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$,
   (11) $z = 2 - 2\mathbf{i}$, (12) $z = 1 + \mathbf{i}$, (13) $z = -8\mathbf{i}$, (14) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (15) $z = \sqrt{3} + \mathbf{i}$.

9. Wyznaczyć pierwiastki zespolone stopnia $n = 4$ z liczby zespolonej z, dla

   a) $z = 16$ b) $z = -16$ c) $z = 8\mathbf{i}$ d) $z = -9\mathbf{i}$
   e) $z = 16 + 16\mathbf{i}$ f) $z = 9 - 9\mathbf{i}$ g) $z = -4 + 4\mathbf{i}$ h) $z = -4 - 4\mathbf{i}$

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera: $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$, otrzymamy postać trygonometryczną w formie $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = re^{\mathbf{i}\varphi}$, gdzie $r = |z|$. Wyznaczyć w postaci algebraicznej liczby zespolone:

    (1) $e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}$, (2) $e^{\pi\mathbf{i}}$, (3) $e^{\frac{3\pi}{2}\mathbf{i}}$, (4) $e^{2\pi\mathbf{i}}$, (5) $e^{-2\pi\mathbf{i}}$, (6) $e^{\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}}$, (7) $e^{-\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}}$,
    (8) $e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}$, (9) $e^{\frac{5\pi}{2}\mathbf{i}}$, (10) $e^{\frac{7\pi}{4}\mathbf{i}}$, (11) $e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}}$, (12) $e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbf{i}}$, (13) $e^{\frac{5\pi}{3}\mathbf{i}}$, (14) $e^{-\frac{7\pi}{3}\mathbf{i}}$,
    (15) $e^{\frac{22\pi}{3}\mathbf{i}}$, (16) $e^{\frac{31\pi}{2}\mathbf{i}}$, (17) $e^{\frac{27\pi}{4}\mathbf{i}}$, (18) $e^{\frac{40\pi}{6}\mathbf{i}}$, (19) $e^{\frac{55\pi}{3}\mathbf{i}}$, (20) $e^{\frac{-38\pi}{4}\mathbf{i}}$, (21) $e^{\frac{-45\pi}{4}\mathbf{i}}$.

Janusz Wysoczański