MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 02 – MACIERZE I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH .

1. Wykonać mnożenie następujących macierzy 2×2:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, (6) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

(9) $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, (10) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, (11) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. (12) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

2. Które przykłady z poprzedniego zadania pokazują, że mnożenie macierzy nie jest przemienne?

3. Dla macierzy $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ wyznaczyć ich transpozycje A^T, B^T, oraz obliczyć iloczyny: AB, BA, A^2, B^2, A^TB, BA^T, AB^T, B^TA, A^TB^T, B^TA^T.

4. Pokazać, że macierze $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ spełniają warunki: $PQ = 0 = QP$, $P^2 = P = P^T$, $Q^2 = Q = Q^T$.

5. Rozwiązać układy równań liniowych:

(1) $\begin{aligned}x + 2y &= 1\\ -2x + y &= 1\end{aligned}$ (2) $\begin{aligned}2x - y &= -2\\ x + y &= 0\end{aligned}$ (3) $\begin{aligned}x + y &= 3\\ 2x - 3y &= -2\end{aligned}$ (4) $\begin{aligned}2x - 3y &= 0\\ -3x + y &= 1\end{aligned}$ (5) $\begin{aligned}x - 3y &= 12\\ 3x - y &= -12.\end{aligned}$

---

6. Dla macierzy 3×3

$$C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

wyznaczyć C^T, D^T, i obliczyć iloczyny: CD, DC, C^TD, DC^T, CD^T, D^TC, C^TD^T, D^TC^T.

7. Obliczyć wyznaczniki $\det C$, $\det D$ oraz macierze odwrotne do macierzy C i D z poprzedniego zadania.

8. Rozwiązać układy równań liniowych: $CX = Y$, oraz $DX = Y$, gdzie C i D są macierzami z poprzedniego zadania, natomiast X, Y są wektorami w $\mathbb{R}^3$: $X = (x, y, z)$ jest "zmienną", $Y = (1, -2, -1)$.

9. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne powyższych macierzy C i D.

10. Pokazać, że macierze $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, spełniają warunki:

$$(P_k)^2 = P_k = (P_k)^T, \qquad P_jP_k = 0, \qquad P_1 + P_2 + P_3 = I$$

dla $j \neq k$, gdzie $j, k = 1, 2, 3$, a I jest macierzą jednostkową. Jakie są wartości własne tych macierzy?

11. Rozwiązać układy równań liniowych:

(1) $\begin{aligned}x + 2y - z &= 1\\ -2x + y + 3z &= 1\\ x - 3y + 4z &= 2\end{aligned}$ (2) $\begin{aligned}2x - y - 2z &= -2\\ x + y + z &= -3\\ 3x - y - 2z &= -1\end{aligned}$ (3) $\begin{aligned}x + y - z &= 3\\ 2x - 3y + z &= -2\\ y - z &= -1\end{aligned}$ (4) $\begin{aligned}2x - 3y - 2z &= 0\\ -3x + y - z &= 1\\ x + 2z &= 1\end{aligned}$

---

12. Wyznaczyć wartości własne macierzy E, F, G, ich transpozycje E^T, F^T, G^T oraz obliczyć EF, FE, EG, FG, GE, GF, E^2, F^2, G^2, E^3, F^3, $(E + E^T)^2$:

$$E = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

13. Dla macierzy $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i dowolnej liczby naturalnej m uzasadnić, że $B^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c_m \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć liczby c_m.

14. Wyznaczyć dopełnienia algebraiczne każdego z wyrazów następujących macierzy 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Metodą rozwinięcia Laplace'a obliczyć następujące wyznaczniki:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

16. Dla powyższych macierzy A, B, C wyznaczyć macierze odwrotne A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}.

17. Wyznaczyć macierz iloczynu AB (dla macierzy A i B z zadania 14), obliczyć jej wyznacznik, a następnie sprawdzić wzór: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

18. Rozwiązać następujące układy dwóch równań liniowych z trzema niewiadomymi:

(1) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}$ (2) $\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= -1 \end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$

Janusz Wysoczański