

MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 05 – WŁASNOŚCI FUNKCJI (POCHODNE I BADANIE FUNKCJI).

- Dla $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ jest $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ (pochodna iloczynu).
Dla $f(x) = g(h(x))$ jest $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ (pochodna funkcji złożonej).

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$\begin{array}{lll}
 (1) f(x) = \frac{13}{5}x^{\frac{5}{2}}, & (2) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4, & (3) f(x) = -\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3} - 2\sqrt{x^3}, \\
 (4) f(x) = \frac{5x^2 + x - 2}{x^2 + 7}, & (5) f(x) = \sqrt[5]{x^2}, & (6) f(x) = \frac{2}{x^3\sqrt{x}}, \\
 (7) f(x) = \frac{3x^2}{7x^5 - x + 2}, & (8) f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}, & (9) f(x) = \frac{4}{x^3}, \\
 (10) f(x) = 3^{-x}, & (11) f(x) = \frac{x}{\sin x}, & (12) f(x) = x \sin x + \cos x, \\
 (13) f(x) = x^2 e^x, & (14) f(x) = \frac{x}{1 - \cos x}, & (15) f(x) = \arccos x^2, \\
 (16) f(x) = (x^2 + 1)(x - 3), & (17) f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, & (18) f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, \\
 (19) f(x) = \ln(1 - x^2), & (20) f(x) = x \arcsin x, & (21) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \\
 (22) f(x) = e^x \sin x, & (23) f(x) = x \operatorname{arctg} x, & (24) f(x) = x \sin 3x, \\
 (25) f(x) = e^x \cos^2 x, & (26) f(x) = x e^{-x}, & (27) f(x) = (x^3 + 2x)e^{-x}, \\
 (28) f(x) = (1 + \cos x)e^x, & (29) f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}, & (30) f(x) = x^2 \ln x.
 \end{array}$$

- Dla $f(x) = g(x)^{h(x)}$ mamy wzór: $f'(x) = f(x) \cdot [h(x) \cdot \ln g(x)]'$ lub, równoważnie: $f'(x) = f(x) [\ln f(x)]'$ (pochodna logarytmiczna).

2. Obliczyć pochodne następujących funkcji złożonych:

$$\begin{array}{lll}
 (1) f(x) = \ln^2 \sin x, & (2) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2 - x^3)^4}}, & (3) f(x) = \arcsin(1 - x), \\
 (4) f(x) = \sin(e^x), & (5) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}, & (6) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}, \\
 (7) f(x) = x^{\sin x}, & (8) f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, & (9) f(x) = \sqrt{\sin x + \sqrt{x + 2\sqrt{x}}}, \\
 (10) f(x) = e^{\cos x}, & (11) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}, & (12) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}}, \\
 (13) f(x) = x^{5x}, & (14) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, & (15) f(x) = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x, \\
 (16) f(x) = 2^{3^x}, & (17) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}, & (18) f(x) = (4x^2 - 5x + 13)^{\frac{5}{3}}, \\
 (19) f(x) = x^{e^x}, & (20) f(x) = (\sin x)^{\cos x}.
 \end{array}$$

- Funkcja (różniczkowalna) $f(x)$ ma *maksimum lokalne* w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a) = 0$ oraz (koniecznie) spełnia (przynajmniej) **jeden** z następujących dwóch warunków:

- $f'(s) > 0 > f'(t)$ dla dowolnych liczb $s < a < t$, bliskich a ,
- $f''(a) < 0$ (o ile druga pochodna istnieje w a).

- Jeśli dla każdej liczby $s \in (a, b)$ jest $f''(s) > 0$, to funkcja f jest *wypukła* na przedziale (a, b) .

3. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji (czyli: wyznaczyć dziedzinę, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i wartości w tych ekstremach).

$$\begin{array}{llll}
 (1) f(x) = x^3 - 3x, & (2) f(x) = 2x^3 + 4x^2, & (3) f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, & (4) f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \\
 (5) f(x) = x e^x, & (6) f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, & (7) f(x) = \ln(1 - x^2), & (8) f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, \\
 (9) f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}, & (10) f(x) = x e^{-x}, & (11) f(x) = \ln(x^2 - 1), & (12) f(x) = \sqrt{1 - x^2}.
 \end{array}$$