

W poniższych zadaniach, po wyliczeniu całki nieoznaczonej, obliczyć jej pochodną i porównać wynik z funkcją podcałkową.

1. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie, oraz z podanego podstawienia, obliczyć całki:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int x e^{x^2} dx, & (y = x^2), \\
 (3) \int x \sqrt{9 - x^2} dx, & (y = 9 - x^2), \\
 (5) \int \sin x \cos x dx, & (y = \sin x), \\
 (7) \int \frac{x^2}{4 - x^6} dx, & (y = x^3), \\
 (9) \int e^{\sqrt{x}} dx, & (y = \sqrt{x}), \\
 (11) \int x^3 \ln x dx, & (y = \ln x), \\
 (13) \int x \sqrt{4 + x^2} dx, & (y = 4 + x^2), \\
 (15) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx & (y = \operatorname{tg} x), \\
 (17) \int \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x^2}} dx & (y = \sqrt[3]{1 + x^2}), \\
 (2) \int x^2(2x^3 + 4)^2 dx, & (y = 2x^3 + 4), \\
 (4) \int x \sqrt{9 - x^2} dx, & (y = \sqrt{9 - x^2}), \\
 (6) \int \sin x \cos x dx, & (y = \cos x), \\
 (8) \int \frac{e^x}{2e^x + 5} dx, & (y = e^x), \\
 (10) \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(\sin x)} dx, & (y = \ln(\sin x)), \\
 (12) \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx, & (y = e^x), \\
 (14) \int x \sqrt{4 + x^2} dx, & (y = \sqrt{4 + x^2}), \\
 (16) \int \frac{1}{x \ln x} dx & (y = \ln x), \\
 (18) \int \frac{1 + \ln x}{x} dx & (y = 1 + \ln x),
 \end{array}$$

wskazówki:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \text{ jeśli } y = \sqrt{a^2 \pm x^2} & \text{to } ydy = \pm xdx; \\
 (b) \text{ jeśli } y = \sqrt[3]{a^2 + x^2} & \text{to } 3y^2dy = 2xdx; \\
 (c) \text{ jeśli } y = \sqrt{x} & \text{to } 2ydy = dx; \\
 (d) \text{ jeśli } y = \ln x & \text{to } dy = \frac{dx}{x};
 \end{array}$$

2. Całkując przez części obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \int x \sin x dx, & (2) \int x^2 \sin x dx, & (3) \int \sin x \cos x dx, & (4) \int \operatorname{arctg} x dx, \\
 (5) \int \ln x dx, & (6) \int x \ln x dx, & (7) \int x^2 e^x \sin x dx, & (8) \int x \operatorname{arctg} x dx, \\
 (9) \int x^3 \ln x dx, & (10) \int x^2 e^x dx, & (11) \int (x^2 + 2x) \ln x dx, & (12) \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx, \\
 (13) \int x e^x dx & (14) \int \ln^2 x dx, & (15) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, & (16) \int \ln(x^2 + 1) dx,
 \end{array}$$

3. Obliczyć następujące całki nieoznaczone, stosując rozkład na ułamki proste:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx, & (2) \int \frac{1}{x^3 - 1} dx, & (3) \int \frac{3}{x^2 + x - 2} dx, & (4) \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx \\
 (5) \int \frac{x^3}{x + 1} dx, & (6) \int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx, & (7) \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx, & (8) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx \\
 (9) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx & (10) \int \frac{x^3}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx & (11) \int \frac{1}{x^4 - 1} dx & (12) \int \frac{1}{x(1 + x^2)} dx
 \end{array}$$

4. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} dx & (2) \int \frac{3x - 5}{-3x^2 + 6x + 9} dx & (3) \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} dx \\
 (4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx & (5) \int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx & (6) \int \sqrt{x^2 + 4x} dx
 \end{array}$$

5. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{llll}
 (1) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx, & (2) \int \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} dx, & (3) \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx, & (4) \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx, \\
 (5) \int \frac{1}{5 - 3 \cos x} dx, & (6) \int \operatorname{tg}^3 x dx, & (7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx, & (8) \int \sin^4 x dx.
 \end{array}$$

6. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(1) \frac{x}{x^4 + 1} dx, \quad (2) \int x e^{x^2} (x^2 + 1) dx, \quad (3) \int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx, \quad (4) \int \frac{\ln |\operatorname{arctg} x|}{1 + x^2} dx,$$

$$(5) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx, \quad (6) \int x^3 (1 - 5x^2)^{10} dx, \quad (7) \int \cos^3 x dx, \quad (8) \int x^5 e^{x^3} dx.$$

Janusz Wysoczański