

MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 07 – ZBIEŻNOŚĆ SZEREGÓW.

1. Korzystając z definicji obliczyć sumy szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$, b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$, d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{n+1}\sqrt{x} - 2^n\sqrt{x})$

2. Wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne: a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3n+2}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\sin \frac{1}{n}}$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n}$, f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$, g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$, f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$, g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$, h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \ln(n!)}$.

5. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n + 5^n}$, f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

6. Zbadać zbieżność oraz zbieżność absolutną szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{3^n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n^2}$, e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

7. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{25^n}$,	2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)5^n}{7^n 3^{n+1}}$,	3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n^2+2}{7n^2+n}\right)^{2n}$,	4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!(n-3)!}{(2n)!}$,
5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n^2+1}$,	6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+2}{3n+1}$,	7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$,	8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$,
9) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$,	10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$,	11) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$,	12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}$,
13) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$,	14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n^2}$,	15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$,	16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^3+2}$,
17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$,	18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{2^n}$,	19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$,	20) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$,
21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$,	22) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,	23) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+4}{4n+1}\right)^n$,	24) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$,
25) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1}}{5^n (n+1)!}$,	26) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,	27) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2n}{\pi^n + 3}$,	28) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 2^n}{5^{n+2} + n^2}$,
29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n + 1}{2^n + n}$,	30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1} + 2n}{(n+1)!}$,	31) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+10}{n^3 + 2n}$,	32) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\arcsin \frac{n}{n+1})^n + 1}{3^n + n^2}$,
33) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^{n^2} + n^{n^2}}{4^{n+1} \cdot n^{n^2}}$,	34) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \sin \frac{n}{2n} + 2}{n + 2^n}$,	35) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n + 3^n}{(n^2 + 1) + 4^n}$,	36) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1) + 3^{n-1}}{5^{n+1} + n^2}$,