MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 09 – WŁASNOŚCI FUNKCJI (SZEREGI POTĘGOWE).

1. Obliczyć kolejne pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ oraz $f^{(4)}(x)$ funkcji f dla:

   (1) $f(x) = 2x^4 - 3x^2$, (2) $f(x) = \sin 3x$, (3) $f(x) = \exp(-2x+1)$, (4) $f(x) = \ln(1+x)$, (5) $f(x) = \ln(1+x^2)$, (6) $f(x) = xe^x$, (7) $f(x) = x^2 e^x$, (8) $f(x) = x^2 \sin x$.

2. Obliczyć kolejno pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ oraz $f^{(5)}(x)$ podanej funkcji f. Na tej podstawie zgadnąć wzór na n-tą pochodną funkcji f dla:

   (1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, (2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, (3) $f(x) = \ln x$, (4) $f(x) = 2^x$, (5) $f(x) = \sin x$, (6) $f(x) = \cos x$, (7) $f(x) = e^x$.

3. Dla wielomianu $f(x) = 3x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 4x^2 - x + 2$ obliczyć kolejne pochodne f w zerze, czyli liczby $f^{(0)}(0) := f(0)$, $f^{(1)}(0) := f'(0)$, $f^{(2)}(0) := f''(0)$, $f^{(3)}(0) := f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ oraz $f^{(6)}(0)$ i na tej podstawie wyznaczyć szereg Taylora-Maclaurina dla tej funkcji f.

4. Obliczyć kolejne pochodne w zerze, czyli liczby $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$, dla funkcji: (1) $f(x) = e^{2x}$, (2) $f(x) = \cos x$, (3) $f(x) = xe^x$, (4) $f(x) = \sin x$, (5) $f(x) = \ln(1+x)$, (6) $f(x) = \sqrt{1+x}$, i na tej podstawie wyznaczyć ich szeregi potęgowe (Taylora-Maclaurina) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

5. Korzystając ze wzoru: $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, prawdziwego dla $-1 < x < 1$, obliczyć przybliżone wartości liczb $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 7$ z dokładnością $d = 0,01$.

   wskazówka: aby obliczyć $\ln a$ trzeba do wzoru wstawić takie x, żeby $a = \dfrac{1+x}{1-x}$.

6. Korzystając ze wzoru $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ zapisać liczby $\sin 1$, $\sin 2$ oraz $\sin 3$ w postaci szeregu liczbowego. Dla każdego z tych przedstawień policzyć sumę pierwszych trzech wyrazów, otrzymując w ten sposób przybliżenie rozpatrywanej liczby.

7. Korzystając ze wzoru $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ przedstawić liczby e, e^2, $\dfrac{1}{e}$ jako szeregi nieskończone. Następnie, biorąc trzy, a potem cztery, jego pierwsze wyrazy, wyznaczyć przybliżone wartości tej liczby.

8. Korzystając ze wzoru $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$, prawdziwego dla $-1 < x < 1$, gdzie $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$, $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$, oraz $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}$ dla $n \geq 2$, biorąc sumę czterech pierwszych wyrazów

$$\sum_{n=0}^{3} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3,$$

   obliczyć przybliżoną wartość następujących pierwiastków, korzystając z podanych przedstawień (dobierając odpowiednie x):

   (1) $\sqrt{2} = \sqrt{4-2}$, (2) $\sqrt{3} = \sqrt{4-1}$, (3) $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$, (4) $\sqrt{6} = \sqrt{9-3}$, (5) $\sqrt{6} = \sqrt{4+2}$, (6) $\sqrt{8} = \sqrt{9-1}$, (7) $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4}$, (8) $\sqrt{15} = \sqrt{16-1}$, (9) $\sqrt{8} = \sqrt{9-1}$.

Janusz Wysoczański