

MATEMATYKA. I rok Chemii Biologicznej i Środowiska.
LISTA ZADAŃ 10 – FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH.

- Dla ustalonej liczby $c \in \mathbb{R}$ poziomą funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ nazywamy zbiór takich punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ które spełniają równanie $f(x, y) = c$.

1. Wyznaczyć dziedziny oraz dowolne 3 (niepuste) poziomice następujących funkcji:

$$\begin{array}{lll}
 1) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} & 2) f(x, y) = x^2 + y^2 + 2 & 3) f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \\
 4) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 5) f(x, y) = xy & 6) f(x, y) = \sin xy \\
 7) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} & 8) f(x, y) = x & 9) f(x, y) = y \\
 10) f(x, y) = x + y & 11) f(x, y) = x - y & 12) f(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \\
 13) f(x, y) = \frac{x}{y} & 14) f(x, y) = x^2 & 15) f(x, y) = \cos x \\
 16) f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} & 17) f(x, y) = x^2 - y^2 & 18) f(x, y) = \frac{1}{xy}
 \end{array}$$

2. Naszkicować wykresy funkcji:

$$1) f(x, y) = x + 2y \quad 2) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad 3) f(x, y) = x - y + 1 \quad 4) f(x, y) = \sqrt{x + 4y^2}.$$

3. Obliczyć następujące granice funkcji:

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (x - y + 2) & 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} (2x^2 - 3xy + y^2) & 3) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} \\
 4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} & 5) \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{1 + y} & 6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin xy}{y} \\
 7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 8) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \sqrt{x^2 + y^2} &
 \end{array}$$

4. Uzasadnić, że nie istnieją następujące granice:

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \quad 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad 3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad 4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x + y} \quad 5) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x + y}{x^2 - y^2}.$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1, czyli $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ oraz rzędu 2, czyli $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$ i $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ podanych funkcji, sprawdzając czy jest równość $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$:

$$\begin{array}{lll}
 1) f(x, y) = \sqrt{xy} & 2) f(x, y) = \cos xy & 3) f(x, y) = \ln xy \\
 4) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) & 5) f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} & 6) f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \\
 7) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 8) f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} & 9) f(x, y) = x^2 y^3
 \end{array}$$

6. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 dla funkcji:

$$1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Wyznaczyć:

- ogólnym wzorem pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$,
- gradient tej funkcji $(\nabla f)(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$ w punkcie $(a, b) = (-1, 2)$,
- pochodną kierunkową $D_{\vec{u}} f = \langle (\nabla f)(a, b), \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \rangle$ w kierunku wektora $\vec{u} = [2, -1]$, w $(a, b) = (-1, 2)$

dla funkcji $f(x, y)$ danej wzorem:

$$\begin{array}{llll}
 (1) f(x, y) = x^2 y^3, & (2) f(x, y) = x^4 y^4, & (3) f(x, y) = \sin(xy), & (4) f(x, y) = \cos(x^2 y^2), \\
 (5) f(x, y) = \operatorname{tg}(xy), & (6) f(x, y) = e^{-x^2 y^2}, & (7) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, & (8) f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-y^2}.
 \end{array}$$

8. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial H}{\partial u}$ oraz $\frac{\partial H}{\partial v}$ funkcji złożonej $H(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$, gdzie:

- (1) $f(x, y) = ye^x$, $x(u, v) = u^2 + v^2$, $y(u, v) = u^2 - v^2$
 (2) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$, $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = uv$
 (3) $f(x, y) = e^x + e^y$, $x(u, v) = u^2 + v^2$, $y(u, v) = u^2 - v^2$
 (4) $f(x, y) = xy$, $x(u, v) = uv$, $y(u, v) = u + v$
 (5) $f(x, y) = xy$, $x(u, v) = \sin(u + v)$, $y(u, v) = \cos(u - v)$
 (6) $f(x, y) = xy$, $x(u, v) = u - v$, $y(u, v) = u + v$
 (7) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x(u, v) = \sin(u + v)$, $y(u, v) = \cos(u - v)$

9. Obliczyć pochodną $h'(t)$ jeśli $h(t) = f(x(t), y(t))$, oraz:

- (1) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, (2) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.
 (3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$, $x(t) = \sqrt{t}$, $y(t) = 2t + 1$, (4) $f(x, y) = e^{x+y}$, $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin^2 t$.

10. Wyznaczyć różniczki zupełne $dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$ dla:

- (1) $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (2) $F(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 - y^4$, (3) $F(x, y) = \sin xy$, (4) $F(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

11. Wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$ jeśli: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Znaleźć funkcję $F(x, y)$, której różniczką zupełną jest wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, gdzie:

- (1) $P(x, y) = 2x - 4y$, $Q(x, y) = -4x + y$; (2) $P(x, y) = 6x^2 + 3y^2$, $Q(x, y) = 6xy - 3y^2$;
 (3) $P(x, y) = 3(x^2 - y^2)$, $Q(x, y) = -6xy + 2$; (4) $P(x, y) = \frac{y}{x}$, $Q(x, y) = \frac{x}{y}$.

12. Korzystając ze wzoru $f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$ obliczyć w sposób przybliżony wyrażenia:

- (1) $\frac{2,01357}{1,00245}$, (2) $\frac{3,0012}{1,0010}$ (3) $\frac{5,00454}{2,0013}$ (4) $3,00053 \cdot 2,00103$ (5) $1,0031 \cdot 2,00201$ (6) $2,00015 \cdot 2,00203$.

W każdym z przykładów dobrać odpowiednią funkcję $f(x, y)$, wyznaczyć x_0, y_0 oraz przyrosty dx i dy .

13. Wyznaczyć punkty krytyczne, czyli $(a, b) \in D_f$ dla których $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, jeśli:

- (1) $f(x, y) = \sin xy$ (2) $f(x, y) = \cos x + \cos y$ (3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (4) $f(x, y) = e^{xy}$
 (5) $f(x, y) = \cos xy$ (6) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ (7) $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ (8) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

• Niech

$$\mathbf{D}(f)(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right]^2.$$

Jeśli (a, b) jest punktem krytycznym funkcji f to mamy następujące możliwości:

Max. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, to f ma *lokalne maksimum* w (a, b) .

Min. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, to f ma *lokalne minimum* w (a, b) .

Siodło. Jeśli $\mathbf{D}(f)(a, b) < 0$ to (a, b) jest *punktem siodłowym* funkcji f .

14. Wyznaczyć ekstrema lokalne oraz punkty siodłowe następujących funkcji:

- (1) $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$ (2) $f(x, y) = \cos xy$ (3) $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2$
 (4) $f(x, y) = \ln xy$ (5) $f(x, y) = \sin xy$ (6) $f(x, y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$
 (7) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (8) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. Naszkicować na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 krzywe, określone przez następujące funkcje $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, dla:

- a) $x(t) = \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$, b) $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$, c) $x(t) = t$, $y(t) = t^2$,
 d) $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = 2 - \sin t$, e) $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, f) $x(t) = t$, $y(t) = 2t$

16. Wyznaczyć (to znaczy spróbować naszkicować) krzywe w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 , określone przez następujące funkcje $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dla:

- a) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$, b) $x(t) = \cos t$, $y(t) = t \sin t$, $z(t) = t$,
 c) $x(t) = 2t$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2$ d) $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, $z(t) = t$.

wskazówka: zbadać jakie relacje spełniają funkcje współrzędne x, y, z .